

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

WYDZIAŁ INŻYNIERII MECHANICZNEJ I ROBOTYKI

PROJEKT INŻYNIERSKI

Porównanie wybranych metod lokalizacji odkształcenia z wykorzystaniem analizy numerycznej i eksperymentalnej

Autor: **Michał Para**
Kierunek studiów: Mechanika i budowa maszyn

Opiekun pracy: **dr inż. Przemysław Nosal**

. . . . . .
podpis

Kraków, rok 2026

Spis treści

1. Wprowadzenie ... 3
1.1. Cel i zakres pracy ... 3
2. Mechanika ciała stałego ... 5
2.1. Wielkości stosowane w mechanice ciała stałego ... 5
2.1.1. Naprężenie ... 5
2.1.2. Naprężenia główne ... 8
2.1.3. Intensywność naprężenia ... 11
2.1.4. Odkształcenie ... 11
2.2. Energia odkształcenia ... 13
2.3. Parametr trójosiowości ... 13
2.4. Parametr Lodego ... 14
2.5. Teoria idealnej plastyczności ... 16
2.6. Modelowanie plastyczności materiałów porowatych ... 17
2.6.1. Uszkodzenie i zniszczenie materiałów ciągliwych ... 19
2.7. Lokalizacja odkształcenia ... 20
3. Identyfikacja parametrów modelu GTN ... 22
4. Analiza lokalizacji odkształcenia z wykorzystaniem symulacji numerycznych 27
4.1. Przygotowanie symulacji ... 27
4.2. Model nielokalny ... 28
4.3. Przeprowadzone symulacje ... 29
5. Podsumowanie ... 39

1. Wprowadzenie

W inżynierii mechanicznej najważniejszym kryterium oceny konstrukcji jest jej wytrzymałość oraz bezpieczeństwo podczas eksploatacji. Analiza mechanizmów trwałej deformacji oraz zniszczenia jest kluczowa w procesie doboru materiałów przy konstruowaniu oraz walidacji urządzeń poddawanych eksploatacji.
W powszechnie stosowanych materiałach ciągliwych, takich jak stale, miedź lub aluminium, zniszczenie jest poprzedzone rozwojem mikrouszkodzeń oraz zjawiskiem lokalizacji odkształcenia. Proces ten jest wynikiem ewolucji mikrostruktury w postaci nukleacji, wzrostu i łączenia się mikropustek.
Zastosowany model materiałowy Gursona, w przeciwieństwie do klasycznych hipotez wytężeniowych, takich jak HMH, uwzględnia porowatość i jej rozwój aż do zniszczenia materiału. Model ten jest powszechnie stosowany w programach do symulacji numerycznych. Jego stosowanie jest jednak problematyczne z powodu wrażliwości na rozmiar i jakość siatki. Identyfikacja parametrów materiałowych dla tego modelu jest kluczowa do przeprowadzenia adekwatnej symulacji.
Motywacją do podjęcia niniejszego tematu jest wzrost potrzeb przemysłu na dokładne symulowanie procesu deformacji oraz zniszczenia. Wynika to z dążenia do optymalizacji kosztów oraz zwiększenia bezpieczeństwa. Stosowanie zaawansowanych modeli materiałowych dokładnie odwzorowujących zachowanie materiału jest problematyczne. Wymagania modelu plastyczności porowatej dotyczące jakości siatki oraz kalibracji parametrów, powstrzymują jego powszechne zastosowanie w przemyśle. Praca ta ma na celu dokładne opisanie zastosowania modelu Gursona. Zaczynając od jego kalibracji, a kończąc na analizie wpływu modelu nielokalnego na ostateczny wynik

1.1. Cel i zakres pracy

Celem pracy jest analiza i porównanie metod lokalizacji odkształcenia w materiałach ciągliwych oraz ocena modelu materiałowego Gursona. Nacisk położono na jego skuteczność w przewidywaniu miejsca inicjacji pęknięcia.
W celu dokładnej analizy tematu zostały zamodelowane oraz przygotowane trzy różne geometrie próbek do badań. Po przeprowadzeniu próby statycznego rozciągania, zebrane

dane posłużyły do identyfikacji parametrów modelu Gursona. Optymalizacja została przeprowadzona w programie OptiSlang. Z powodu zjawiska wrażliwości siatki występującego w modelu Gursona przeprowadzono kalibracje parametrów dla trzech różnych rozmiarów elementu. Do właściwych symulacji zostało wykorzystane oprogramowanie LS Dyna. We właściwych symulacjach wykorzystano dodatkowo model nielokalny w celu poprawnego zasymulowania lokalnego wzrostu pustek w modelu Gursona.

2. Mechanika ciała stałego

Mechanika ciała stałego jest to dział mechaniki opisujący zachowanie ciała pod wpływem sił zewnętrznych. Upraszcza ona budowę materii do skali makro, pomijając jej mikroskopowe właściwości

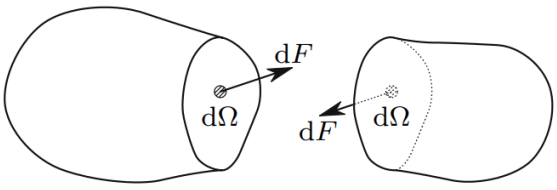
2.1. Wielkości stosowane w mechanice ciała stałego

2.1.1. Naprężenie

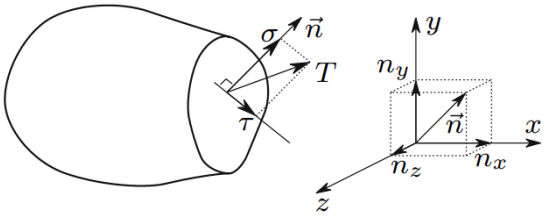
W trakcie odkształcania ciał rzeczywistych, zmiana objętości i postaci geometrycznej skutkuje powstawaniem wewnętrznych oddziaływań międzycząsteczkowych, które przeciwdziałają tym zmianom. Jeżeli na powierzchnię wewnątrz ciała Ω Rysunek 2.1 działa wypadkowa siła wewnętrzna $\boldsymbol{F}$, to dzieląc nieskończenie małą siłę $\mathrm{d}F$ przez nieskończenie małą powierzchnię $\mathrm{d}\Omega$, otrzymamy siłę wewnętrzną przez jednostkę powierzchni czyli naprężenie [1]

$$\boldsymbol{T} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}\Omega} \tag{2.1}$$

.



Rys. 2.1. Siła wewnętrzna na nieskończenie małej powierzchni [2].



Rys. 2.2. Naprężenie na nieskończenie małej powierzchni [2].

W prostokątnym kartezjańskim układzie odniesienia xyz kierunek nieskończenie małej powierzchni $\mathrm{d}\Omega$ można zdefiniować przy pomocy wektora jednostkowego $\vec{n}$ (Rys. 2.2), który jest prostopadły do płaszczyzny ścianki. Jego składowe to cosinusy kątów między wektorem a osiami układu współrzędnych

$$n_x = \cos(n, x) = l, \qquad n_y = \cos(n, y) = m, \qquad n_z = \cos(n, z) = n.$$

Długość jednostkową tego wektora określa równanie

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \tag{2.2}$$

Naprężenia działające na ściankę można rozłożyć na dwie składowe: normalną o kierunku wektora $\vec{n}$ $\sigma = T\cos\alpha$ oraz styczną o kierunku prostopadłym do wektora $\vec{n}$ $\tau = T\sin\alpha$. Kąt α znajduje się między wektorem jednostkowym $\vec{n}$, a wektorem naprężenia $\boldsymbol{T}$. W przypadku ścianki, która jest prostopadła do układu współrzędnych, naprężenia normalne σ są równoległe do jednej z osi układu współrzędnych, a naprężenia styczne τ można rozłożyć na składowe o kierunkach pozostałych osi układu. Stanem naprężenia w punkcie nazywamy naprężenia występujące we wszystkich elementach powierzchni $\mathrm{d}\Omega$ nieskończenie małego prostopadłościennego elementu objętości, różniących się kierunkiem normalnej. Stosując kartezjański układ współrzędnych x, y, z i dobierając elementy powierzchni $\mathrm{d}\Omega^{(i)}$ tak, że ich normalne są równoległe do osi układu, otrzymamy trzy wektory naprężenia jednoznacznie wyznaczające stan naprężenia w tym punkcie

$$\boldsymbol{T}^{(n)} = \boldsymbol{T}^{(x)}n_x + \boldsymbol{T}^{(y)}n_y + \boldsymbol{T}^{(z)}n_z = \boldsymbol{T}^{(k)}n_k. \tag{2.3}$$

Wektory te można następnie rozłożyć na składowe w kierunkach osi układu. Otrzymuje się wtedy dziewięć składowych σ_{ij}. Tworzą one tensor drugiego rzędu zwany tensorem naprężenia. Równanie wektorowe (2.3) można przedstawić w formie trzech równań.

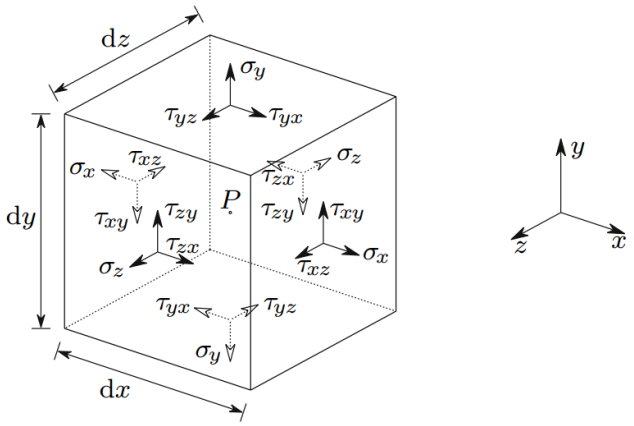
$$\begin{aligned} T_x^{(n)} &= \sigma_{xx}n_x + \sigma_{yx}n_y + \sigma_{zx}n_z, \\ T_y^{(n)} &= \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y + \sigma_{zy}n_z, \\ T_z^{(n)} &= \sigma_{xz}n_x + \sigma_{yz}n_y + \sigma_{zz}n_z. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Przy użyciu konwencji sumacyjnej

$$T_i^{(n)} = \sigma_{ij}n_j. \tag{2.5}$$

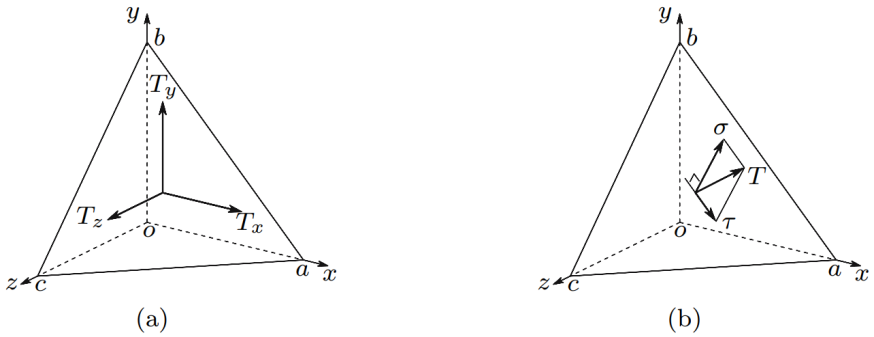
Naprężenia normalne równoległe do osi układu współrzędnych x, y, z można oznaczyć jako $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$. Naprężenia styczne oznacza się za pomocą notacji τ_{ij}, gdzie pierwszy indeks oznacza kierunek normalnej, a drugi kierunek wektora naprężenia. Rysunek 2.3

przedstawia stan naprężenia w nieskończenie małym sąsiedztwie punktu P. Naprężenia działają na trzy pary ścianek, które są prostopadłe do osi układu współrzędnych.



Rys. 2.3. Stan naprężenia w punkcie [2].

W nieskończenie małym czworościanie na pochylonej ściance abc, której normalna $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ nie jest równoległa z żadną z osi układu współrzędnych Rysunek 2.4a.



Rys. 2.4. Naprężenia na pochylonej ściance [2].

Oznaczając składowe wektora naprężenia T_x, T_y, T_z działającego na ściankę abc oraz cosinusy kierunkowe wektora jednostkowego l, m, n, możemy wyznaczyć równania Cauchy'ego

$$\begin{cases} T_x = l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} \\ T_y = l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{zy} \\ T_z = l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z. \end{cases} \tag{2.6}$$

W zapisie macierzowym możemy zapisać

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix}. \tag{2.7}$$

Istnieją dwa sposoby zapisu składowych tensora naprężenia: matematyczny nazywany też wskaźnikowym oraz inżynierski. Obie notacje są porównane w tabeli 2.1. Zaletą notacji matematycznej jest możliwość skrócenia długich wzorów dzięki zastosowaniu konwencji sumacyjnej Einsteina. Notacja inżynierska jest za to bardziej czytelna oraz jest znacznie lepsza przy rozpisywaniu wzorów względem współrzędnych. Z tych powodów jest powszechnie stosowana przez inżynierów.

Tab. 2.1. Porównanie notacji matematycznej oraz inżynierskiej [3].

Osie układu kartezjańskiego		Naprężenia w notacji	
		wskaźnikowej	inżynierskiej
x_1	x	$\sigma_{11}\quad \sigma_{12}\quad \sigma_{13}$	$\sigma_x\quad \tau_{xy}\quad \tau_{xz}$
x_2	y	$\sigma_{21}\quad \sigma_{22}\quad \sigma_{23}$	$\tau_{yx}\quad \sigma_y\quad \tau_{yz}$
x_3	z	$\sigma_{31}\quad \sigma_{32}\quad \sigma_{33}$	$\tau_{zx}\quad \tau_{zy}\quad \sigma_z$

$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. W zapisie inżynierskim składowe normalne są oznaczone symbolem σ, a składowe styczne symbolem τ:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

Stan naprężenia $\begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ nazywamy stanem jednoosiowym.

Stan naprężenia $\begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ nazywamy stanem czystego ścinania.

Stan naprężenia $\begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix}$ nazywamy stanem hydrostatycznym,

gdzie σ_m to naprężenia średnie opisane wzorem

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}.$$

2.1.2. Naprężenia główne

Naprężeniami głównymi nazywamy wartości tensora naprężenia σ_{ij} tak obróconego w układzie współrzędnych, że nie występują naprężenia styczne. Stan naprężenia, gdzie występują tylko naprężenia normalne takie, że składowe wektora naprężenia są równe

$T_x = l\sigma, T_y = m\sigma, T_z = n\sigma$ podstawiając do równania (2.7) można opisać jednorodnym układem równań liniowych

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{2.9}$$

Niewiadomymi tych równań są naprężenia σ oraz składowe wektora jednostkowego l, m, n. Układ równań (**??** ma rozwiązania trywialne $l = m = n = 0$. Nie jest to możliwe, ponieważ składowe l, m, n nie mogą być jednocześnie równe zero. Jedyne poprawne rozwiązanie jest opisane równaniem

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = -\sigma^3 + I_1\sigma^2 - I_2\sigma + I_3 = 0. \tag{2.10}$$

Wartości I_1, I_2, I_3 nazywane są niezmiennikami głównymi tensora naprężenia i są równe

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\ I_2 &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2, \\ I_3 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\,\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Pierwiastkami równania (2.10) są naprężenia główne, które występują na ściankach, gdzie naprężenia styczne są równe 0. Oznacza się je symbolami $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, gdzie $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Jeżeli $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ są naprężeniami głównymi to równanie (2.10) możemy zapisać jako;

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = 0. \tag{2.12}$$

Niezmienniki główne tensora naprężenia opiszą wtedy wzory:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ I_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1, \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Tensor naprężenia możemy rozłożyć na aksjator (tensor kulisty) $\sigma_m\delta_{ij}$, a s_{ij} to dewiator

$$\sigma_{ij} = \sigma_m\delta_{ij} + s_{ij}. \tag{2.14}$$

Symbol δ_{ij} to delta Kroneckera definiowana jako

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j), \\ 1 & (i = j). \end{cases} \tag{2.15}$$

Podstawiając do wzoru (2.14) tensor naprężenia przyjmie postać

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix}}_{\text{aksjator}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix}}_{\text{dewiator}}. \tag{2.16}$$

Aksjator reprezentuje stan hydrostatyczny i wywołuje tylko zmianę objętości ciała. Dewiator to stan czystego ścinania, odpowiada tylko za zmianę kształtu bez zmiany objętości. Naprężenia średnie można opisać

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{1}{3} I_1. \tag{2.17}$$

Możemy zapisać $\sigma = s + \frac{1}{3} I_1$ i podstawiając do równania (2.10) otrzymamy równanie

$$s^3 - I_{1s} s^2 + I_{2s} s - I_{3s} = 0, \tag{2.18}$$

gdzie I_{1s}, I_{2s}, I_{3s} to niezmienniki główne dewiatora naprężenia. Opisują je składowe dewiatora naprężenia s_{ij}:

$$\begin{aligned} I_{1s} &= s_{xx} + s_{yy} + s_{zz} = 0, \\ I_{2s} &= -\frac{1}{2} s_{ij} s_{ji}, \\ I_{3s} &= \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Związek między niezmiennikami dewiatora naprężenia I_{2s}, I_{3s}, a głównymi niezmiennikami tensora naprężenia I_1, I_2, I_3 opisuje :

$$\begin{aligned} I_{2s} &= -\frac{1}{3}(I_1^2 - 3I_2), \\ I_{3s} &= \frac{1}{27}(2I_1^3 - 9I_1 I_2 + 27I_3). \end{aligned} \tag{2.20}$$

2.1.3. Intensywność naprężenia

Intensywność naprężenia jest przydatną w teorii plastyczności niezmienniczą, skalarną funkcją składowych tensora naprężenia. opisuje ją wzór

$$\sigma_e = s_e = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} = \sqrt{-3 I_{2s}}. \tag{2.21}$$

Podstawiając wzór (2.11) do wzoru (2.20) otrzymamy

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \tag{2.22}$$

Dla naprężeń głównych intensywność naprężenia wynosi

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \tag{2.23}$$

2.1.4. Odkształcenie

Przemieszczenie punktu ciała poddanego odkształceniu można opisać wektorem przemieszczenia $\boldsymbol{u}(u_1, u_2, u_3) = \boldsymbol{u}(u, v, w)$. Przy małych odkształceniach i małych obrotach przyrost odcinka można opisać tensorem drugiego rzędu zwanym tensorem odkształcenia nieskończenie małego.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \tag{2.24}$$

Podobnie jak w przypadku tensora naprężenia, tensor odkształcenia można zapisać na dwa sposoby.

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{zy} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \tag{2.25}$$

Odkształcenia główne $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ są to wartości główne tensora odkształcenia .

$$\varepsilon^3 = I_{1\varepsilon}\varepsilon^2 + I_{2\varepsilon}\varepsilon - I_{3\varepsilon}, \tag{2.26}$$

gdzie $I_{1\varepsilon},\ I_{2\varepsilon},\ I_{3\varepsilon}$ są głównymi niezmiennikami tensora odkształcenia. Tensor odkształcenia ε_{ij} można również rozłożyć na aksjator $\varepsilon_m \delta_{ij}$ oraz dewiator e_{ij} zgodnie z równaniem

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_m \delta_{ij} + e_{ij}. \tag{2.27}$$

Po podstawieniu otrzymamy

$$\varepsilon_{ij} = \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{bmatrix}}_{\text{aksjator}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_m & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon_m & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon_m \end{bmatrix}}_{\text{dewiator}}, \tag{2.28}$$

gdzie odkształcenie średnie jest równe

$$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}. \tag{2.29}$$

Niezmienniki główne dewiatora odkształcenia I_{1e}, I_{2e}, I_{3e} są określone podobnie jak niezmienniki dewiatora naprężenia (2.30):

$$\begin{aligned} I_{1e} &= e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = 0, \\ I_{2e} &= -\frac{1}{2} e_{ij} e_{ji}, \\ I_{3e} &= \frac{1}{3} e_{ij} e_{jk} e_{ki}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Dla tensora odkształcenia możemy również wprowadzić niezmiennik zwany intensywnością odkształcenia ε_e. Wartość ta w zakresie sprężystym spełnia prawo Hooke'a opisane wzorem

$$\varepsilon_e = \frac{1}{E}\sigma_e, \tag{2.31}$$

gdzie E to moduł Younga.
Dla odkształceń głównych intensywność odkształcenia wynosi

$$\varepsilon_e = \frac{\sqrt{2}}{2(1+\nu)}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}, \tag{2.32}$$

gdzie ν to współczynnik Poissona.
Intensywność odkształcenia podobnie jak intensywność naprężenia zależy od drugiego niezmiennika głównego dewiatora. Przyjmując współczynnik Poissona $\nu = 0,5$ otrzymamy

$$\varepsilon_e = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij} e_{ij}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{-I_{2e}}. \tag{2.33}$$

Podstawiając do wzoru (2.31) i wprowadzając moduł Kirchhofa $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ otrzymamy

$$\sigma_e = G\sqrt{2}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}. \tag{2.34}$$

2.2. Energia odkształcenia

Całkowita energia sprężysta jest opisana równaniem

$$\Phi = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}. \tag{2.35}$$

Podstawiając wzory (2.14) oraz (2.27) otrzymamy

$$\Phi = \frac{1}{2}(\sigma_m\delta_{ij} + s_{ij})(\varepsilon_m\delta_{ij} + e_{ij}). \tag{2.36}$$

. Wymnażając nawiasy energia sprężysta rozkłada się na dwie składowe: energię właściwą odkształcenia objętościowego Φ_v oraz energię właściwą odkształcenia postaciowego Φ_f zgodnie ze wzorem

$$\Phi = \underbrace{\frac{3}{2}\sigma_m\varepsilon_m}_{\Phi_v} + \underbrace{\frac{1}{2}s_{ij}e_{ij}}_{\Phi_f}. \tag{2.37}$$

2.3. Parametr trójosiowości

Parametr trójosiowości (ang. *stress triaxiality*) jest bezwymiarową miarą opisującą stosunek naprężeń hydrostatycznych do miary naprężeń deviatorowych [4]. Definiuje się go jako

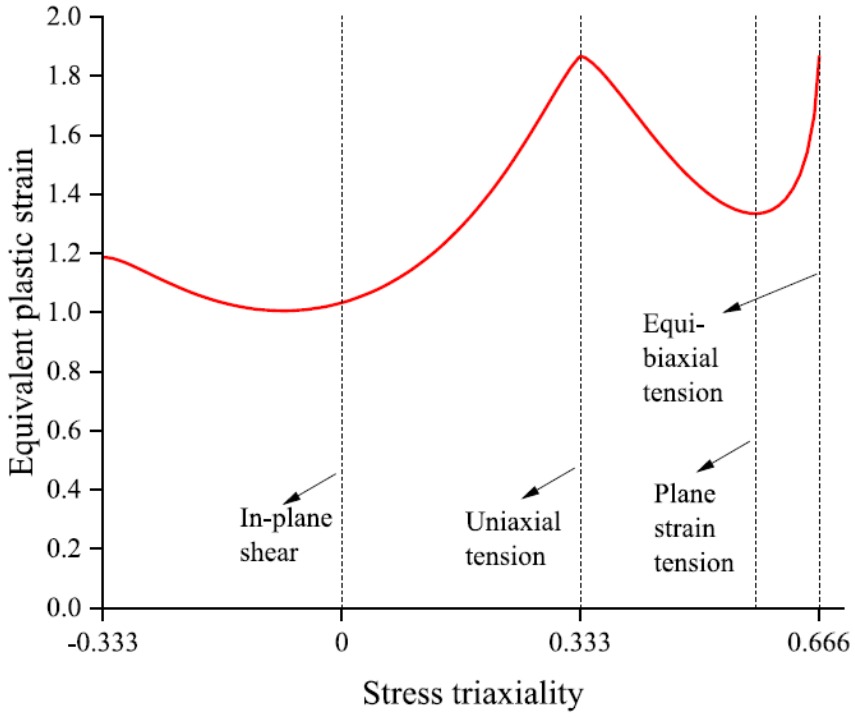
$$T = \frac{\sigma_m}{\sigma_\mathrm{e}}. \tag{2.38}$$

Parametr trójosiowości opisuje wpływ stanu hydrostatycznego na zachowanie materiału i ma istotne znaczenie w analizie plastyczności oraz procesów zniszczenia (np. powstawania i rozwoju mikroporów w metalach).

Typowe wartości parametru trójosiowości:

- $T = -\frac{1}{3}$ – stan jednoosiowego ściskania,
- $T = 0$ – stan czystego ścinania,
- $T = \frac{1}{3}$ – stan jednoosiowego rozciągania,
- $T = \frac{2}{3}$ – stan dwuosiowego rozciągania (płaszczyznowego),
- $T \to \infty$ – stan czysto hydrostatyczny.

Wykres równoważnego odkształcenia plastycznego przy zniszczeniu od parametru trójosiowości (Rys.2.5) dla najbardziej obciążonego punktu analizowanego materiału pozwala określić jaki stan naprężenia dominował przy pęknięciu.



Rys. 2.5. Miejsce pęknięcia w warunkach odkształcenia płaskiego [5].

2.4. Parametr Lodego

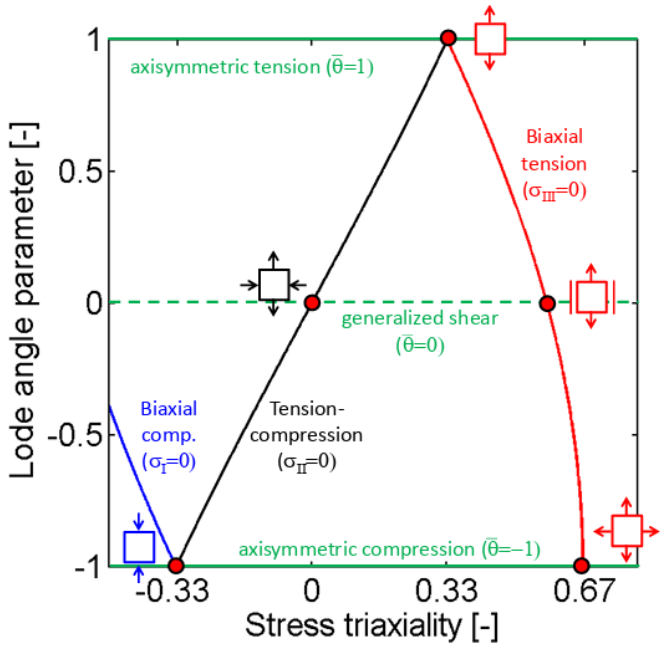
Parametr Lodego jest bezwymiarową miarą opisującą położenie stanu naprężenia w przestrzeni dewiatorowej [4]. Jest on przydatny w przypadku analizy stanu naprężenia przy niskich wartościach parametru trójosiowości T, czyli w przypadku ścinania. Określa się go następująco

$$L = -\frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}. \tag{2.39}$$

Parametr ten przyjmuje wartości z przedziału $[-1, 1]$, przy czym:

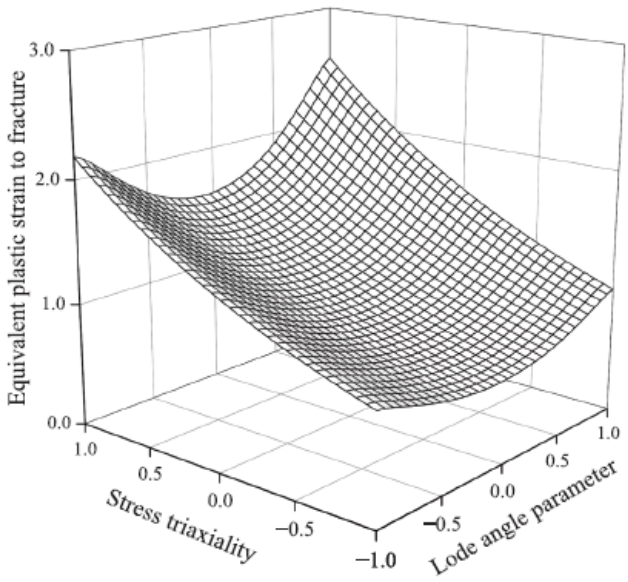
- L = -1 – stan jednoosiowego ściskania,
- L = 0 – stan czystego ścinania,
- L = 1 – stan jednoosiowego rozciągania.

Przy analizie stanu naprężenia rysuje się wykres zależności parametru Lodego od trójosiowości Rysunek 2.6. Zależność tych parametrów pozwala nam określić jaki stan naprężenia występuje w badanym materiale.



Rys. 2.6. Wykres parametru Lodego w zależności od parametru trójosiowości [6].

Parametr Trójosiowości oraz parametr Lodego można również powiązać z równoważnym odkształceniem plastycznym w chwili pęknięcia ε_f^p. Wykres ten pokazuje krzywą graniczną inicjacji pęknięcia, przy użyciu której można określić wpływ stanu naprężenia na pękanie materiału.



Rys. 2.7. Krzywa graniczna inicjacji pęknięcia [5].

2.5. Teoria idealnej plastyczności

W celu sformułowania kryterium przejścia materiału idealnie plastycznego ze stanu sprężystego w stan plastyczny, stawia się hipotezę o istnieniu skalarnej funkcji stanu naprężenia $f(\sigma_{ij})$, zwanej kryterium wytężenia [7]. Jest ona stała na brzegu obszaru odpowiadającego zakresowi sprężystemu $f(\sigma_{ij}) = c$. Stałość tej funkcji wyraża warunek idealnej plastyczności.
Dla określonej funkcji $F = f - c$ materiał jest w stanie sprężystym jeśli

$$F(\sigma_{ij}) < 0 \qquad \text{lub} \qquad F(\sigma_{ij}) = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma_{ij}} < 0, \tag{2.40}$$

oraz w stanie plastycznym, jeśli

$$F(\sigma_{ij}) = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma_{ij}} = 0. \tag{2.41}$$

Dla materiałów izotropowych możemy przyjąć symetryczną funkcję naprężeń głównych,

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0, \tag{2.42}$$

lub też funkcję trzech niezmienników stanu naprężenia,

$$F(I_1, I_2, I_3) = 0. \tag{2.43}$$

Najczęściej stosowanym warunkiem plastyczności jest warunek Hubera [8] - Misesa [7] - Hencky'ego [9] (HMH), zakłada on, że przejście w stan plastyczny zależy jedynie od drugiego głównego niezmiennika dewiatora naprężenia I_{2s}

$$F(I_{2s}) = \sigma_e - \sigma_0, \tag{2.44}$$

gdzie σ_0 to granica plastyczności.
Podstawiając wzór (2.22 otrzymamy

$$)(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6({\tau_{xy}}^2 + {\tau_{yz}}^2 + {\tau_{zx}}^2) - 2\sigma_0^2 = 0. \tag{2.45}$$

Dla naprężeń głównych wzór ten po przekształceniu będzie w postaci

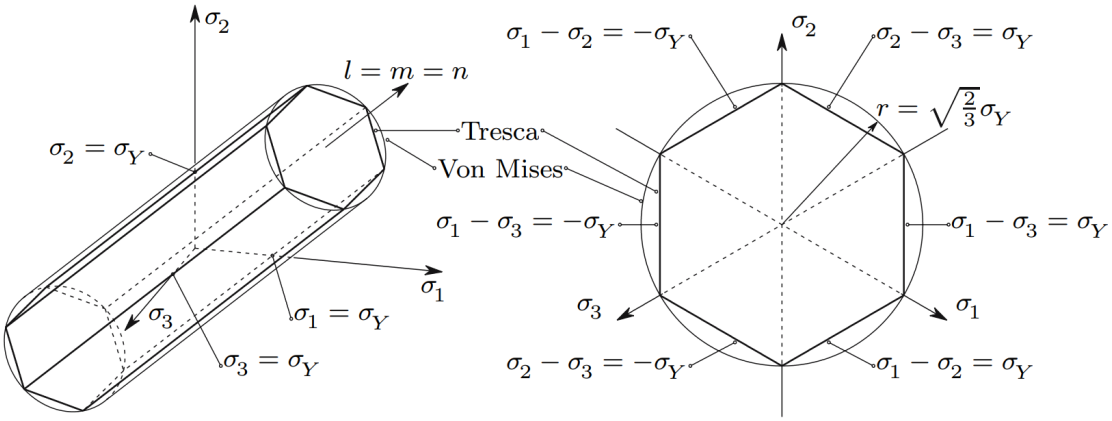
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_0. \tag{2.46}$$

Wyrażenie to jest powszechnie używane przy obliczeniach wytrzymałościowych dla materiałów ciągliwych.

Hipoteza HMH stwierdza, że o uplastycznieniu materiału decyduje energia właściwa odkształcenia postaciowego

$$\Phi_f = \frac{1}{2} s_{ij} e_{ij} = \frac{1}{4G} s_{ij} s_{ij}. \tag{2.47}$$

Powierzchnię plastyczności HMH można przedstawić przy pomocy walca kołowego Rysunek 2.8.



Rys. 2.8. Powierzchnia plastyczności. [2]

Funkcja plastyczności dla hipotezy HMH jest opisana wzorem

$$\Phi = \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0}\right)^2 - 1 = 0. \tag{2.48}$$

Określa on warunek przejścia w stan plastyczny. Kiedy Φ<0 występuje stan sprężysty opisany prawem Hooke'a (2.31), w momencie kiedy $\Phi = 0$ następuje przejście w stan plastyczny i trwałe odkształcenie materiału. W sensie fizycznym uplastycznienie zachodzi w przypadku gdy naprężenia zredukowane σ_e są równe granicy plastyczności σ_0. Hipoteza HMH opisuje materiał do momentu przekroczenia granicy plastyczności, dalsze uplastycznienie wraz ze wzmocnieniem nie jest rozważane

2.6. Modelowanie plastyczności materiałów porowatych

Model Gursona [10] był jednym z pierwszych modeli materiałowych, który brał pod uwagę mikrouszkodzenia. Został on zmodyfikowany przez Tvergaarda [11] oraz Needelmana [12]. Zmodyfikowany model Gursona oznacza się skrótem GTN. Oparty jest on na założeniu, że udział pustki w funkcji potencjału plastycznego uwzględniony jest poprzez jej udział objętościowy f [13]. zależność tę opisuje wzór

$$\Phi = \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0}\right)^2 + 2q_1 f^* \cosh\left(\frac{3q_2\sigma_m}{2\sigma_0}\right) - (1 + q_3 f^{*2}) = 0, \tag{2.49}$$

gdzie:

- f^* – bieżąca wartość udziału objętościowego pustek,
- q_1, q_2, q_3 – współczynniki Tvergaarda.

bieżącą wartość udziału objętościowego pustek f^* opisuje zależność:

$$f^* = \begin{cases} f, & f < f_c, \\ f_c + \dfrac{\bar{f}_F - f_c}{f_f - f_c}(f - f_c), & f_c \leq f \leq f_F, \\ \bar{f}_F, & f > f_F, \end{cases} \tag{2.50}$$

gdzie:

- f_c - krytyczny udział objętościowy pustek odpowiadający początkowi łączenia się pustek,
- f_F - krytyczny udział objętościowy pustek odpowiadający zniszczeniu materiału,
- $\bar{f}_F$ - współczynnik definiujący prędkość wzrostu f^* opisany zależnością:

$$\bar{f}_F = \frac{(q_1 + \sqrt{q_1^2 - q_3})}{q_3} \tag{2.51}$$

Udział objętościowy pustek w materiale określa wielkość f_o odnosząca się do pierwotnej porowatości. To znaczy, że przed poddaniem materiału deformacji wartość udziału objętościowego pustek wynosi f^*. Wzrost udziału objętościowego pustek opisuje suma wzrostu pustek istniejących w materiale oraz pustek nukleowanych:

$$\dot{f} = \dot{f_{gr}} + \dot{f_{nucl}} \tag{2.52}$$

Wzrost pustek istniejących w materiale oraz pustek nukleowanych opisują zależności:

$$\dot{f}_{gr} = (1 - f)\dot{\varepsilon}^p, \tag{2.53}$$

$$\dot{f}_{\text{nukl}} = \frac{f_N}{S_N\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_{em}^{pl} - \varepsilon_N}{s_N}\right)^2\right] \cdot \dot{\varepsilon}_{em}^{pl}, \tag{2.54}$$

gdzie:

- $\dot{f}$ - wzrost udziału objętościowego pustek,
- $\dot{f_{gr}}$ - wzrost udziału objętościowego pustek istniejących w materiale,
- $\dot{f}_{nucl}$ - wzrost udziału objętościowego pustek spowodowany ich nukleacją,
- f_N - udział objętościowy pustek nukleowanych,
- S_N - odchylenie standardowe odkształcenia nukleacji pustek,
- $\dot{\varepsilon}^{pl}$ - tensor prędkości przyrostu odkształceń plastycznych,

– ε_N - średnie odkształcenia nukleacji pustek,
– ε_{em}^{pl} - zastępcze odkształcenia plastyczne,
– $\dot{\varepsilon}_{em}^{pl}$ - prędkość przyrostu zastępczego odkształcenia plastycznego.

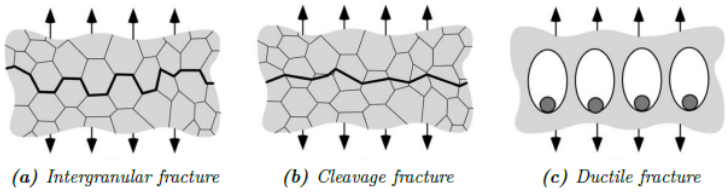
Dla zerowego udziału objętościowego pustek $f^* = 0$ model GTN jest opisany równaniem

$$\Phi = \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0}\right)^2 - 1 = 0.$$

Jest to ta sama funkcja plastyczności co w przypadku hipotezy HMH (2.48). Różnica polega na tym, że model GTN opisuje zachowanie materiału po przejściu w stan plastyczny uwzględniając wzmocnienie. Model GTN uwzględnia wpływ naprężeń hydrostatycznych σ_m, co sprawia, że przydatny staje się parametr trójosiowości T, który można wykorzystać do analizy wyników i zachowania modelu. Przy niskich wartościach T, czyli w przypadku gdzie zachodzi ścinanie, model GTN znacząco traci na dokładności. Jest to spowodowane tym, że zakłada on, że pustki zachowują kulisty kształt przy deformacji, co nie jest prawdą w przypadku ścinania.

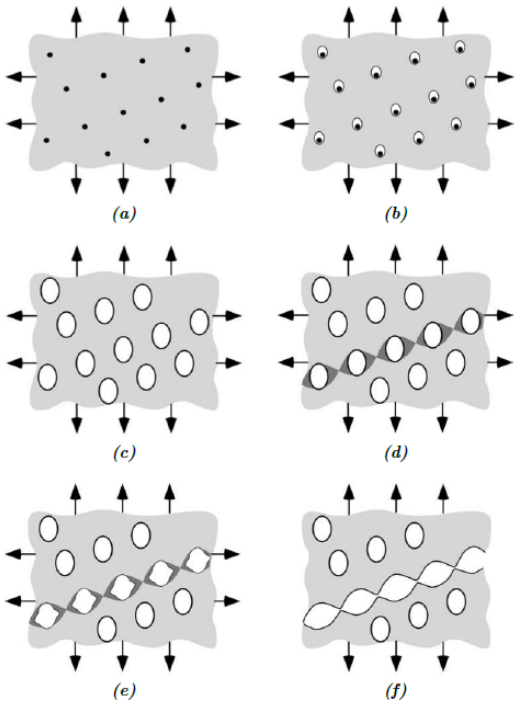
2.6.1. Uszkodzenie i zniszczenie materiałów ciągliwych

Najczęstszymi mechanizmami pękania w metalach i stopach są pękanie międzykrystaliczne 2.9a, pękanie łupliwe oraz pękanie plastyczne [4]. Pękanie międzykrystaliczne nie występuje w normalnych okolicznościach jak na rysunku 2.9a, a pękanie łupliwe kojarzone jest z materiałami kruchymi jak na rysunku 2.9b. Pękanie plastyczne pokazane na rysunku 2.9c dotyczy materiałów plastycznych takich jak stopy aluminium.



Rys. 2.9. Mechanizmy pękania, a) pękanie międzykrystaliczne, b) pękanie łupliwe, c) pękanie plastyczne [4].

Pękanie plastyczne zakłada, że w ciele znajdują się niedoskonałości w postaci pustek oraz wtrąceń 2.10a. Wzrost oraz powstawanie tych pustek pod wpływem obciążenia i odkształcenia powoduje pękanie oraz zniszczenie materiału. Pustki powstają przede wszystkim wokół wtrąceń niemetalicznych lub wydzieleniach innej fazy. O procesie zniszczenia decydują wzrost pustek 2.10c, powstawanie nowych pustek oraz ich łączenie się 2.10f.



Rys. 2.10. Mikromechanizm pękania plastycznego, a) wtrącenia w ciągliwej matrycy, b) nukleacja pustek, c) wzrost pustek, d) lokalizacja odkształcenia między pustkami, e) przewężenie między pustkami, f) łączenie się pustek oraz pękanie [4].

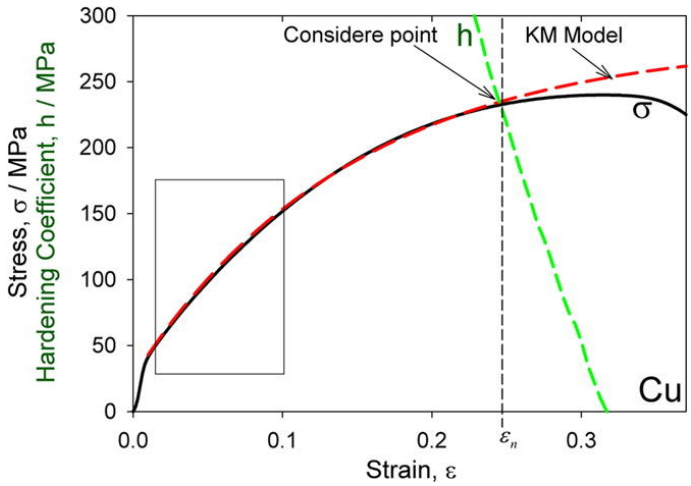
2.7. Lokalizacja odkształcenia

Lokalizacja odkształcenia jest zjawiskiem występującym w różnych warunkach obciążenia takich jak jednoosiowe i wielosiowe, cykliczne czy przy deformacjach z dużymi prędkościami. Dotyczy ono materiałów takich jak ciągliwe monokryształy, materiały polikrystaliczne o różnych rozmiarach ziarna, materiały nanokrystaliczne oraz szkła metaliczne. Zjawisko to jest konsekwencją utraty równomiernego odkształcenia co powoduje plastyczną niestabilność. Lokalizacja odkształcenia objawia się niejednorodnością odkształcenia w skali dyslokacji. Najczęstszym przypadkiem jej występowania w materiałach ciągliwych jest powstawanie przewężenia podczas odkształcenia. Najbardziej znanym kryterium przewężenia jest to zaproponowane przez Considère[14] opisane wzorem

$$h = \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial \varepsilon_{rz}} = \sigma_{rz}, \tag{2.55}$$

gdzie h to wykładnik umocnienia, σ_{rz} to naprężenie rzeczywiste, a ε_{rz} to odkształcenie rzeczywiste. Kryterium to można zwizualizować na przykładzie próby statycznego rozciągania, podczas której jest mierzona siła oraz odkształcenie. Podczas takiego badania w materiale zachodzą dwa zjawiska: Umocnienie materiału - potrzeba coraz większej siły aby go odkształcić oraz spadek pola powierzchni przekroju - siła potrzebna do deformacji

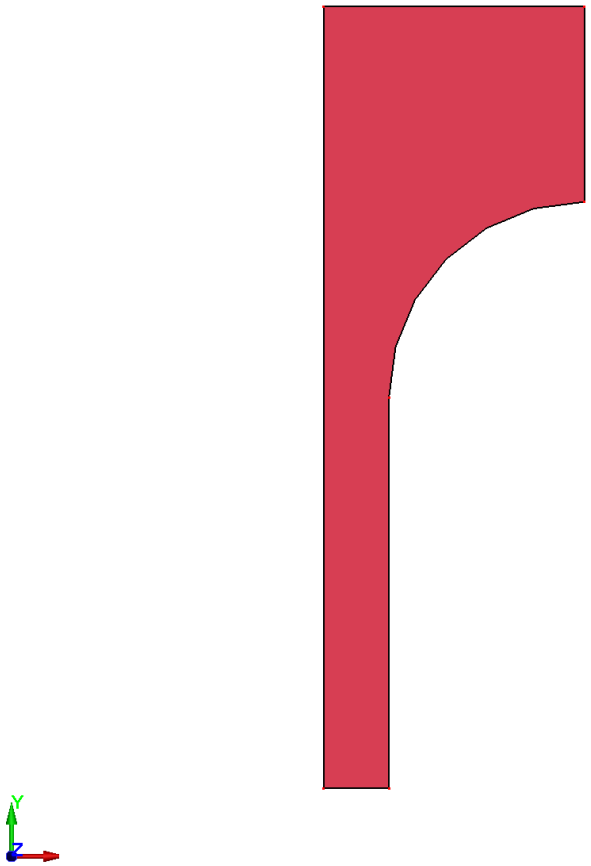
maleje. Kryterium Considère (2.55) mówi, że spadek pola powierzchni przekroju nastąpi w momencie kiedy siła rozciągająca osiąga maksimum. Wykres na rysunku 2.11 przedstawia wykres naprężenie-odkształcenie, na którym w momencie największej wartości siły jest zaznaczony punkt Considère, czyli miejsce gdzie zaczyna powstawać przewężenie.



Rys. 2.11. Wykres z zaznaczonym punktem Considère w miejscu odpowiadającemu początkowi powstawania szyjki [15].

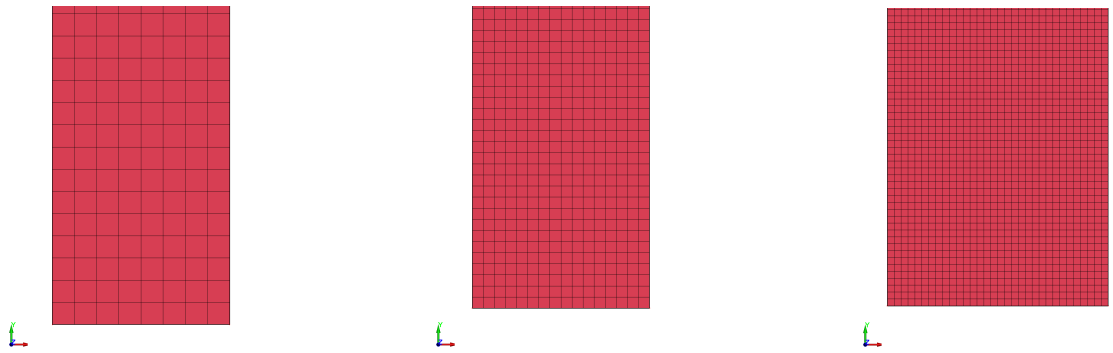
3. Identyfikacja parametrów modelu GTN

Zachowanie modelu GTN opisanego równaniem (2.49) zależy od ośmiu niezależnych od siebie parametrów. Odpowiedni ich dobór (kalibracja) pozwala na dokładne opisanie zachowania materiału pod wpływem obciążenia. W programie LS Dyna parametrami modelu GTN są $q_1, q_2, f_c, f^*, \varepsilon_N, S_N, f_N, f_F$. q_3 jest zdefiniowane jako ${q_1}^2$
Optymalizację parametrów przeprowadzono na podstawie symulacji próby statycznego rozciągania. Analizowaną geometrię zamodelowano w $\frac{1}{4}$ symetrii w celu skrócenia czasu symulacji. Przedstawiono ją na rysunku3.1.



Rys. 3.1. Model próbki w programie LS Dyna.

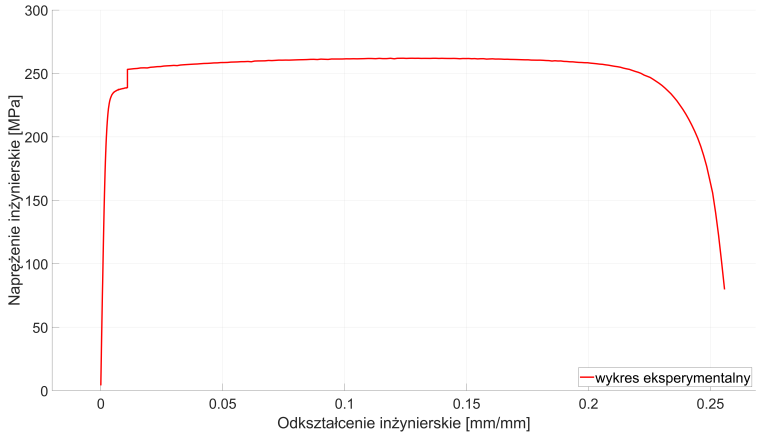
W celu zbadania wrażliwości modelu GTN na gęstość siatki, optymalizację przeprowadzono dla trzech różnych wielkości elementów: 0,6 mm, 0,3 mm, 0,15 mm. Gęstość siatki w przybliżeniu przedstawiają rysunki 3.2.



(a) 0,6 mm (b) 0,3 mm (c) 0,15 mm

Rys. 3.2. Wielkość siatki w przybliżeniu.

Model został poddany jednoosiowemu rozciąganiu z prędkością 0,05 mm/s. Podczas symulacji zebrano wartości przemieszczenia punktu pomiarowego oraz siły reakcji w przekroju w górnej części modelu. Znając początkowe pole przekroju utwierdzenia oraz położenie punktu pomiarowego, pozwoliło to wyznaczyć wykres naprężenia inżynierskiego σ_{sim} od odkształcenia inżynierskiego ε_{sim}.
Celem optymalizacji było dopasowanie krzywej z symulacji do krzywej eksperymentalnej 3.3. Dane eksperymentalne zaczerpnięto z pracy [16]. Analizowano w niej miedź CuETP. Widoczny na wykresie uskok wynika z odsunięcia ekstensometru w trakcie pomiaru. Nie miało to większego wpływu na proces oraz wyniki kalibracji, ponieważ model GTN różnił się od krzywej porównawczej tylko dla odkształceń plastycznych po przewężeniu.



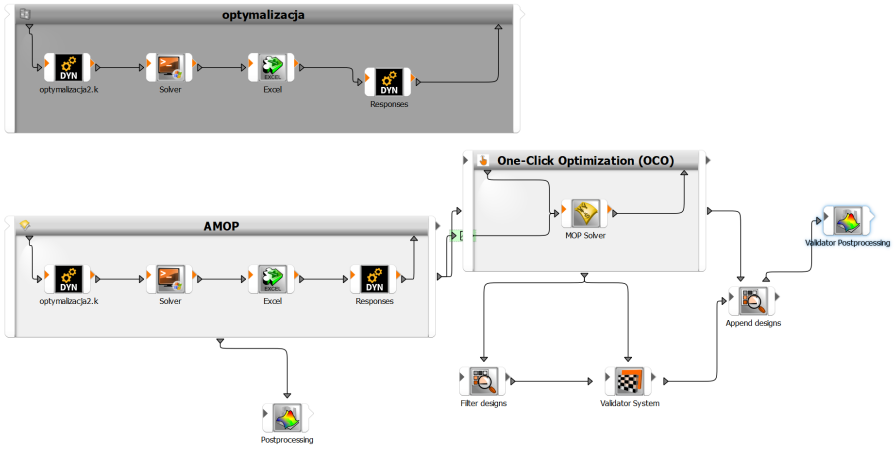
Rys. 3.3. Wykres eksperymentalny.

Wstępne parametry modelu GTN oraz zakres dla którego były optymalizowane przedstawiono w Tabeli 3.1. Proces identyfikacji parametrów został przeprowadzony przy

Tab. 3.1. Wartości początkowe oraz zakres parametrów modelu GTN

Parametr	q_1	q_2	f_c	f^*	ε_N	S_N	f_N	f_F
Wartość początkowa	1,5	1	0,1	0,005	0,3	0,1	0,005	0,15
Dolny zakres	1,35	0,9	0,05	0,0001	0,2	0,05	0,001	0,13
Górny zakres	1,65	1,1	0,15	0,01	0,35	0,15	0,01	0,3

użyciu oprogramowania OptiSlang z dodatkowo wykorzystanym solverem LS Dyna. Schemat procesu przedstawiono na rysunku 3.4

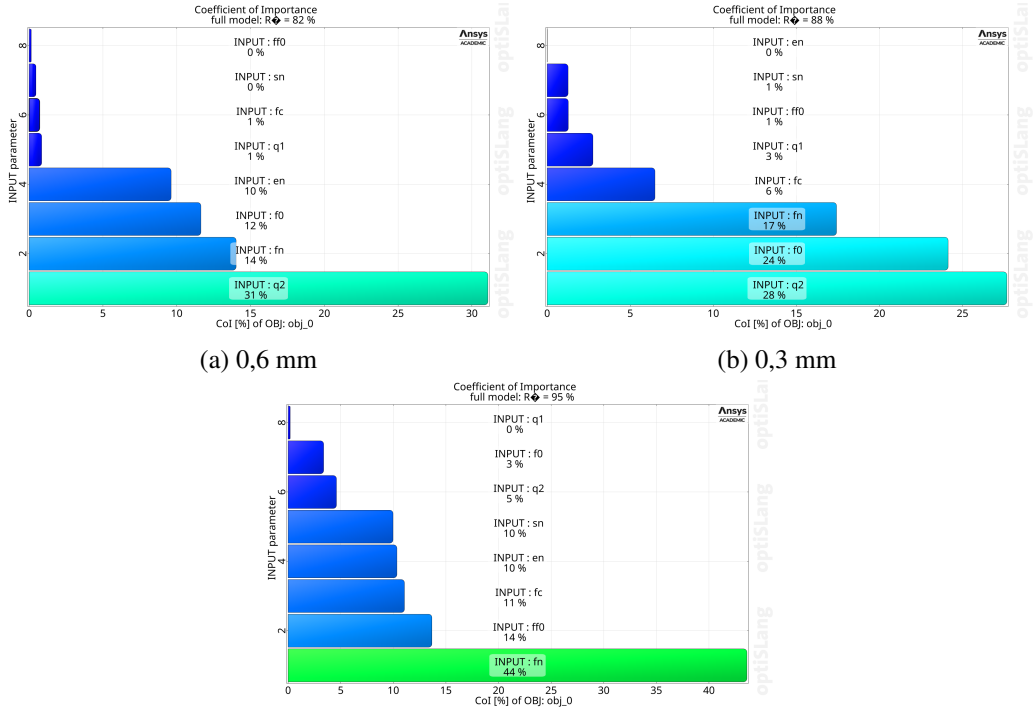


Rys. 3.4. schemat procesu optymalizacji w programie OptiSlang.

Jako kryterium dla którego zrealizowano kalibrację parametrów przyjęto minimalizację błędu średniokwadratowego (RMSE). Wartość funkcji celu opisuje wzór

$$J = \sqrt{\frac{1}{n}\sum (\sigma_{eks} - \sigma_{sim})^2}. \tag{3.1}$$

gdzie n oznacza liczbę punktów pomiarowych.
Pierwszym etapem kalibracji modelu GTN była analiza czułości (Sensitivity Analysis), której efektem była identyfikacja wpływu poszczególnych parametrów na kształt krzywej rozciągania. W tym celu program zebrał wyniki symulacji dla różnych konfiguracji modelu GTN starając się zminimalizować RMSE. Łącznie przeanalizowano 150 symulacji, po 50 dla każdej wielkości siatki.



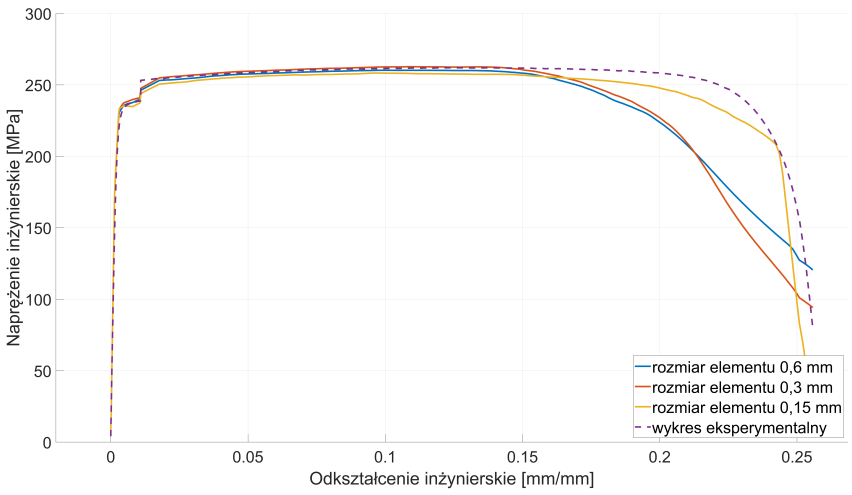
(a) 0,6 mm

(b) 0,3 mm

(c) 0,15 mm

Rys. 3.5. Porównanie wpływu poszczególnych parametrów na dopasowanie wykresu.

Na wykresach 3.5 widoczny jest procentowy wpływ parametrów, uzyskany podczas analizy czułości. Dla rozmiarów elementu 0,6 mm i 0,3 mm największe znaczenie mają wartości q_2, f_n, f_0. W przypadku wykresu 3.5c dla rozmiaru elementu równego 0,15 mm zdecydowanie największe znaczenie ma parametr f_n. Tak duże różnice współczynników istotności są spowodowane wrażliwością siatki, którą charakteryzuje się model GTN.



Rys. 3.6. Porównanie wykresów z optymalizacji z wykresem eksperymentalnym.

Wyniki analizy czułości wykorzystane zostały do optymalizacji parametrów modelu GTN. Uzyskane krzywe pokazuje rysunek 3.6. Krzywe uzyskane dla rozmiaru elementu 0,6 mm i 0,3 mm charakteryzują się znaczną rozbieżnością z wartościami eksperymentalnymi. W przypadku siatki 0,15 mm wykresy niewiele się różnią. Zauważalny spadek naprężeń w krzywych z symulacji jest spowodowany tym, że w symulacjach numerycznych model składa się z małych elementów co skutkuje skokowym spadkiem naprężenia w momencie erozji elementów skończonych. Rozwiązaniem tego problemu jest stosowanie jak najgęstszej siatki co widać na przykładzie elementu 0,15 mm.
Ostatecznie we właściwych symulacjach zostały wykorzystane parametry modelu GTN skalibrowane dla rozmiaru siatki równego 0,15 mm widoczne w Tabeli 3.2.

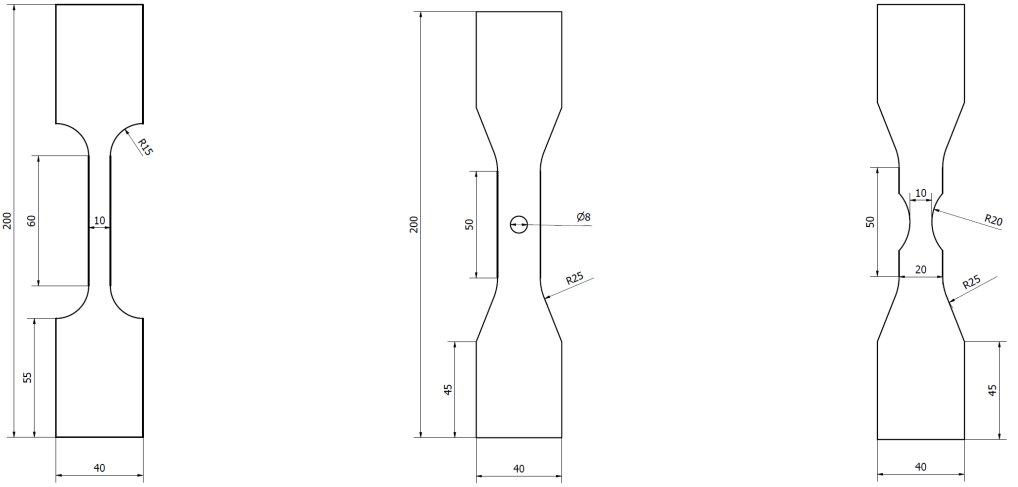
Tab. 3.2. Wartości parametrów modelu GTN skalibrowane dla wielkości elementu równej 0,15 mm.

Parametr	q_1	q_2	f_c	f^*	ε_N	S_N	f_N	f_F
Wartość skalibrowana	1,575	1,05	0,145	0,009	0,27	0,125	0,005	0,16

4. Analiza lokalizacji odkształcenia z wykorzystaniem symulacji numerycznych

4.1. Przygotowanie symulacji

Geometria i wymiary modeli, pokazane na rysunku 4.1 zostały zaczerpnięte z badania [5]. Grubość próbek wynosiła 4 mm. Wybrane zostały one w celu zbadania modelu GTN w różnych stanów naprężenia. Otwór w środku oraz karb wymuszają inne zachowanie materiału niż klasyczna gładka geometria. Lokalne zmniejszenie pola przekroju, powoduje koncentrację naprężeń w wąskim paśmie materiału. Pozwala to wymusić lokalizację odkształcenia w konkretnym miejscu.



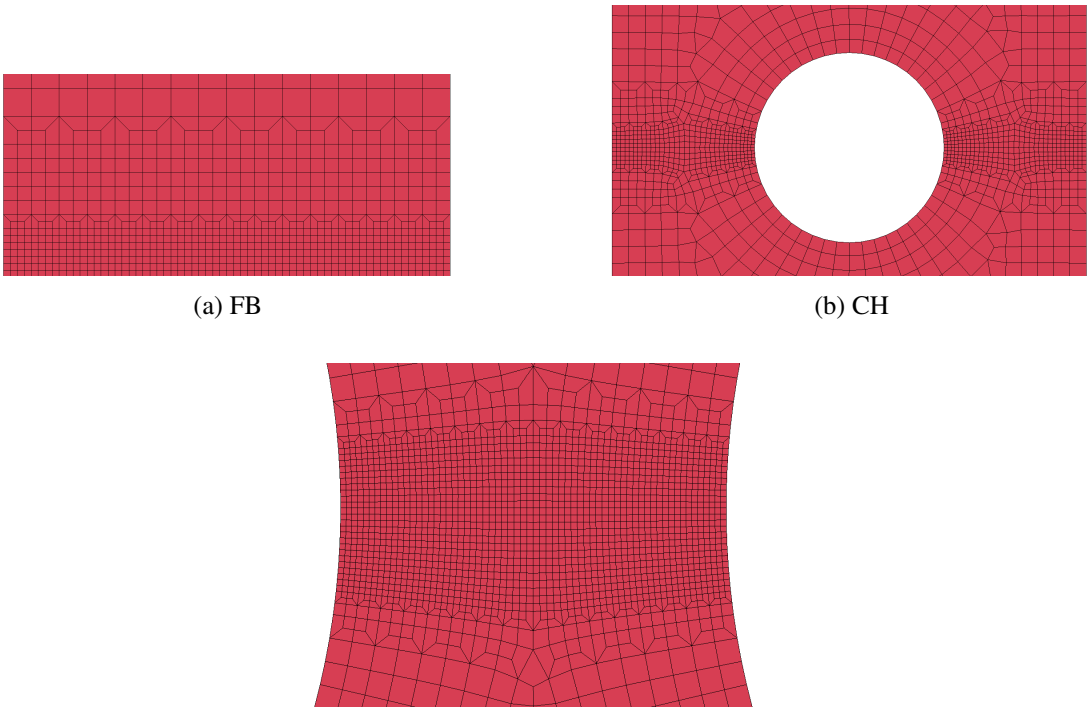
(a) FB (flat bar) - próbka płaska

(b) CH (central hole) - próbka z otworem

(c) NT (notched tension) - próbka z karbem

Rys. 4.1. Geometria i wymiary badanych próbek.

Dla wszystkich modeli siatka w miejscu krytycznym została zagęszczona do rozmiaru 0,15 mm. Gęstość siatki przedstawiono na rysunku 4.2.



(a) FB

(b) CH

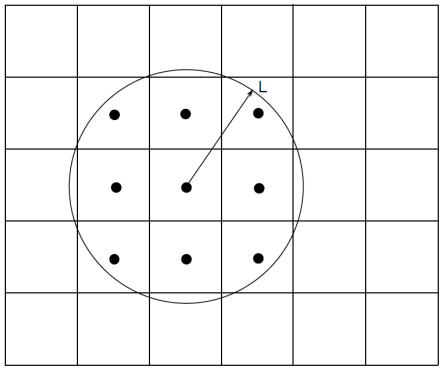
(c) NT

Rys. 4.2. Gęstość siatki w miejscu krytycznym.

W celu oddania warunków próby statycznego rozciągania dolna część modeli została utwierdzona w miejscu poprzez odebranie węzłom stopni swobody. Obciążenie było wynikiem nadanego przemieszczenia górnej części modelu o wartości 0,05 mm/s. Czas trwania symulacji wyniósł: 300 s dla próbki FB, a dla pozostałych 100 s. Danymi zebranymi podczas symulacji były wartości: parametru trójosiowości, parametru Lodego, udział objętościowy pustek oraz przemieszczenie punktu pomiarowego. Do dyskretyzacji zastosowano elementy powłokowe w celu redukcji czasu symulacji.

4.2. Model nielokalny

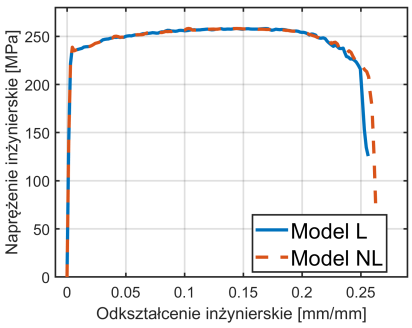
Wyniki symulacji z wykorzystaniem modelu GTN są mocno zależne od rozmiaru siatki (ang. *mesh sensitivity*). Aby wyeliminować ten efekt zastosowano model nielokalny. Wprowadza on parametr długości charakterystycznej L definiujący obszar, w którym uśrednione są zmienne stanu uszkodzenia. Wartość ta powinna być około 2,5 razy większa od wielkości elementu dla rozmiaru elementu 0,15 mm, 0,3 mm, 0,6 mm wyniósł kolejno 0,375, 0,75 oraz 1,5 . W przeprowadzonych symulacjach został zastosowany parametr wzrostu pustek jako wyznacznik uszkodzenia. Dzięki temu miejsce zniszczenia nie jest zależne od gęstości siatki. Pozwala to na wierniejsze oddanie miejsca i procesu pęknięcia. Zasadę działania modelu nielokalnego przedstawia rysunek 4.3.



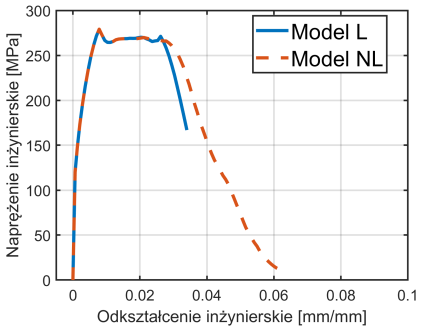
Rys. 4.3. Wizualizacja działania modelu nielokalnego w LS Dyna [17].

4.3. Przeprowadzone symulacje

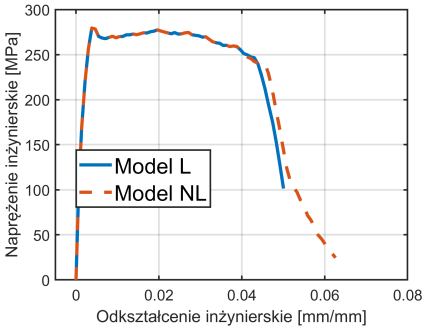
Wyniki zebrane z symulacji pozwoliły na wyznaczenie inżynierskiej krzywej rozciągania dla wszystkich trzech geometrii 4.4. Widać na nich wyraźnie różnice wynikające z zastosowania modelu nielokalnego. Wpływ ten jest najbardziej widoczny na wykresach 4.4b oraz 4.4c, gdzie wystąpiło znaczne zwiększenie maksymalnego odkształcenia. Zastosowanie modelu nielokalnego wyraźnie zmniejszyło wartość naprężenia w chwili pęknięcia. Do momentu powstawania przewężenia i początku gwałtownego spadku wartości siły, krzywe są identyczne.



(a) FB



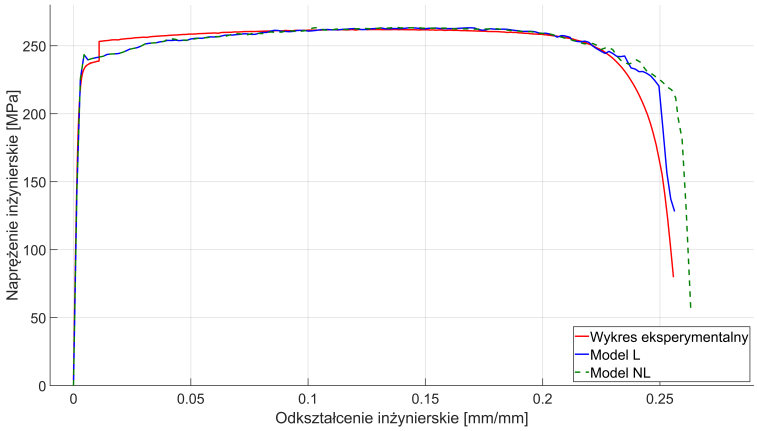
(b) CH



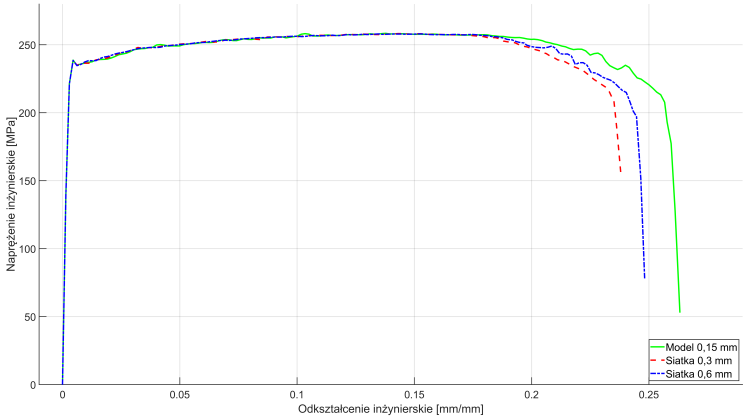
(c) NT

Rys. 4.4. Krzywe rozciągania uzyskane z symulacji.

Wykres na rysunku 4.5 przedstawawia porównanie krzywych rozciagania dla modelu FB z wynikiem eksperymantalnym. Widoczna jest mała rozbieżność pomiędzy wartościami do momentu spadku naprężenia. Zarówno w przypadku modelu lokalnego jak i nielokalnego, maksymalne odkształcenie przy zniszczeniu było minimalnie większe. Wartości RMSE wyniosły odpowiednio: dla L 9.0789, a dla NL 14.4414. Można więc jasno zauważyć, że oba modele są bliskie rzeczywistości z niewielką przewagą dla modelu lokalnego. Rozbieżność wyników jest spowodowana uśrednianiem parametrów stanu zniszczenia co skutkuje większym możliwym odkształceniem.



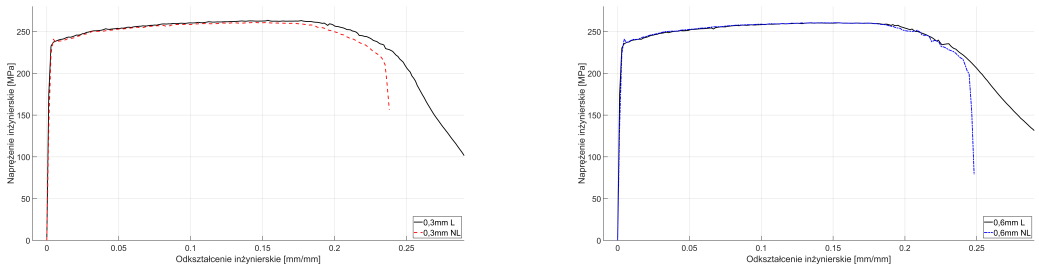
Rys. 4.5. Wykresy rozciągania dla modelu FB porównane z krzywą z eksperymentu.



Rys. 4.6. Porównanie krzywych rozciągania dla różnych wielkosci elementu.

Wpływ modelu nielokalnego na krzywą rozciągania dla różnych rozmiarów elementu pokazano na rysunku 4.6. Widoczna jest na nim zauważalna różnica zarówno w maksymalnym odkształceniu jak i naprężeniu przy zerwaniu. Krzywe dla rozmiarów siatki 0,6 mm i 0,3 mm ulegają wcześniejszemu przerwaniu, z powodu mniejszej ilości

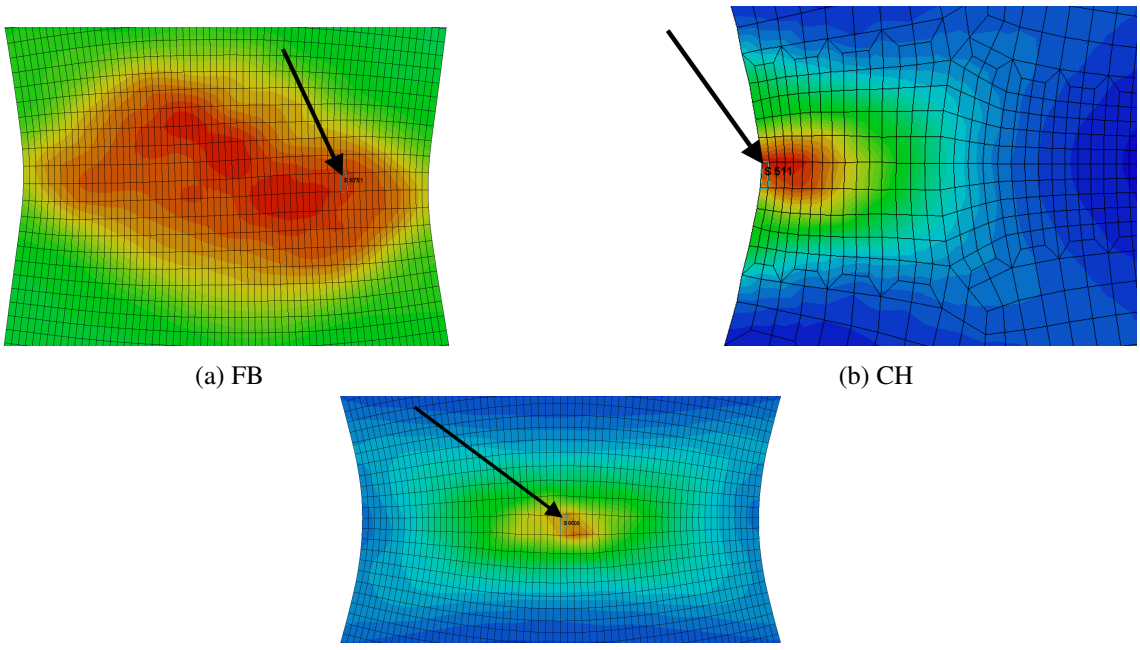
elementów w miejscu pękania. Krzywe te uzyskano symulując model FB z tymi samymi parametrami GTN, ale stosując dodatkowo model nielokalny.



(a) 0,3 mm (b) 0,6 mm

Rys. 4.7. Porównanie wykresów rozciągania dla modeli skalibrowanych oraz modeli nielokalnych

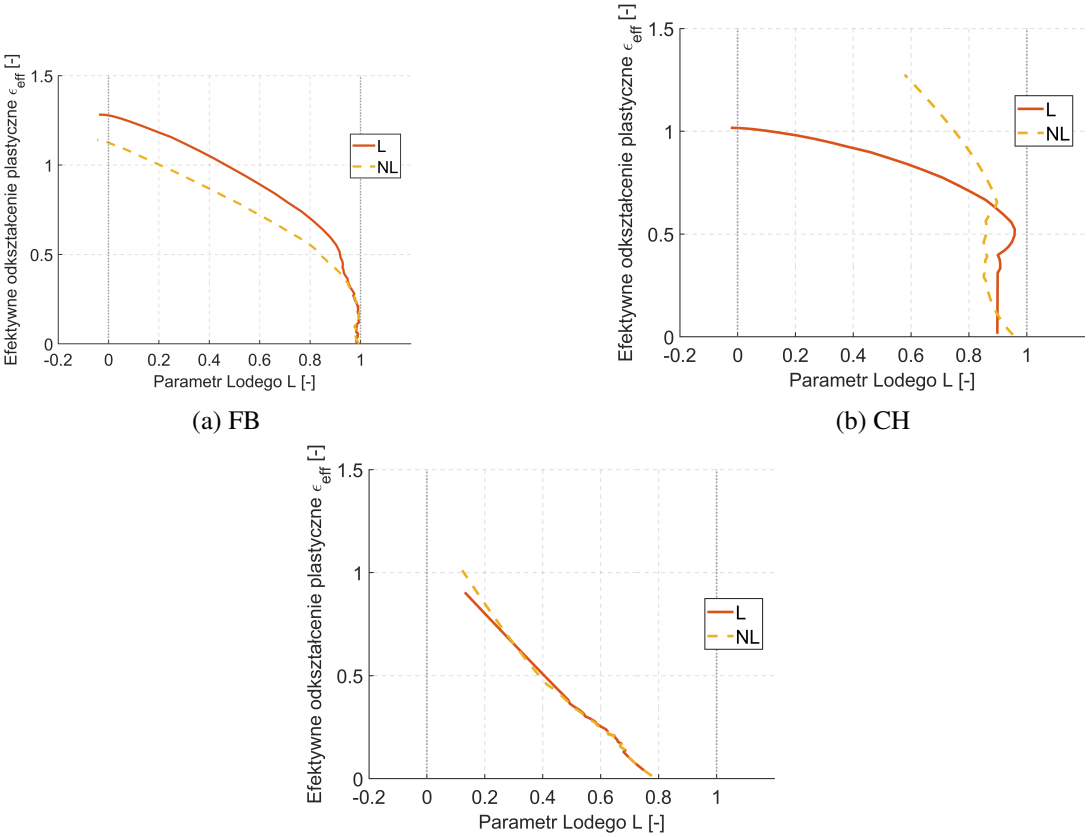
Porównanie efektu kalibracji oraz modelu nielokalnego pokazano na rysunku 4.7. Widoczny jest duży spadek maksymalnego odkształcenia. Model skalibrowany zachowuje się niefizycznie elementy są bardzo mocno rozciągane bez powstania pęknięcia. Model nielokalny uśrednił wartości udziału objętościowego pustek sąsiadujących elementów. Doprowadził przez to do pęknięcia w odpowiednim momencie.
Przeprowadzone symulacje pozwoliły na analizę zachowania modelu GTN w różnych stanach naprężenia. Przeprowadzono ja dla elementu, który po wpływem obciążenia osiągnął największą wartość efektywnego odkształcenia plastycznego. Analizowane elementy są widoczne na rysunku 4.8



(a) FB (b) CH

(c) NT

Rys. 4.8. Lokalizacja najbardziej obciążonego elementu.



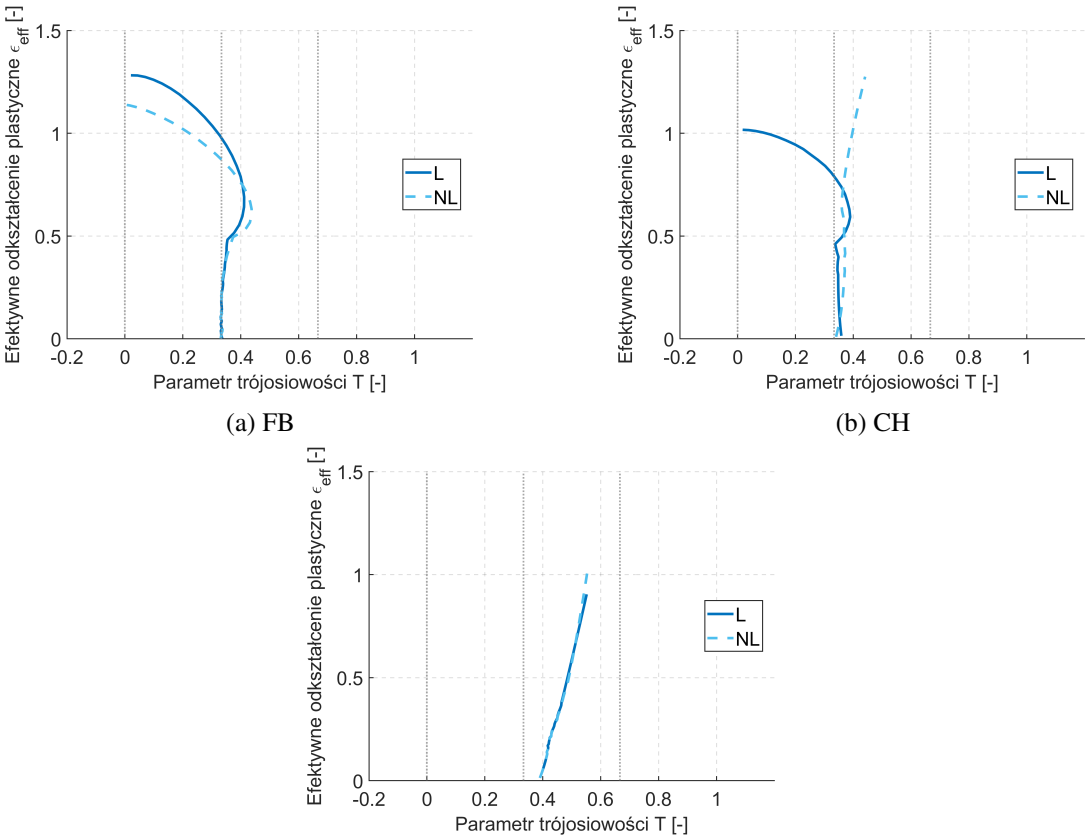
(a) FB

(b) CH

(c) NT

Rys. 4.9. Wykresy efektywnego odkształcenia plastycznego od parametru Lodego z porównaniem modelu lokalnego oznaczonego L i nielokalnego oznaczonego NL.

Wykresy na rysunku 4.9 przedstawiają zależność efektywnego odkształcenia plastycznego od parametru Lodego dla najbardziej obciążonego elementu. Widoczna jest znaczna różnica charakteru stanu naprężenia dla różnych geometrii. Próbka FB przy niskich wartościach odkształcenia jest poddawana jednoosiowemu rozciąganiu. Wraz ze wzrostem odkształcenia i powstawaniem przewężenia, wartość parametru Lodego zaczęła się zbliżać do wartości 0, odpowiadającej ścinaniu. świadczy to o tym, że zniszczenie nastąpiło poprzez ścięcie materiału spowodowane łączeniem się pustek, jak przedstawiono na rysunku 2.10. Próbka CH zachowała się podobnie jak FB. Widać na jej przypadku różnice między modelem lokalnym a nielokalnym. W przypadku tego drugiego parametr Lodego nie spadł do 0 tylko do wartości 0, 6. Świadczy to o tym, że pęknięcie nie nastąpiło przez ścinanie tylko kombinację ścinania z rozciąganiem. Geometria NT przedstawia najgwałtowniejszy spadek parametru Lodego. Wynika to z tego, że obecność karbu wymusza lokalizację odkształcenia w cienkim pasmie materiału wymuszając tym ścinanie.



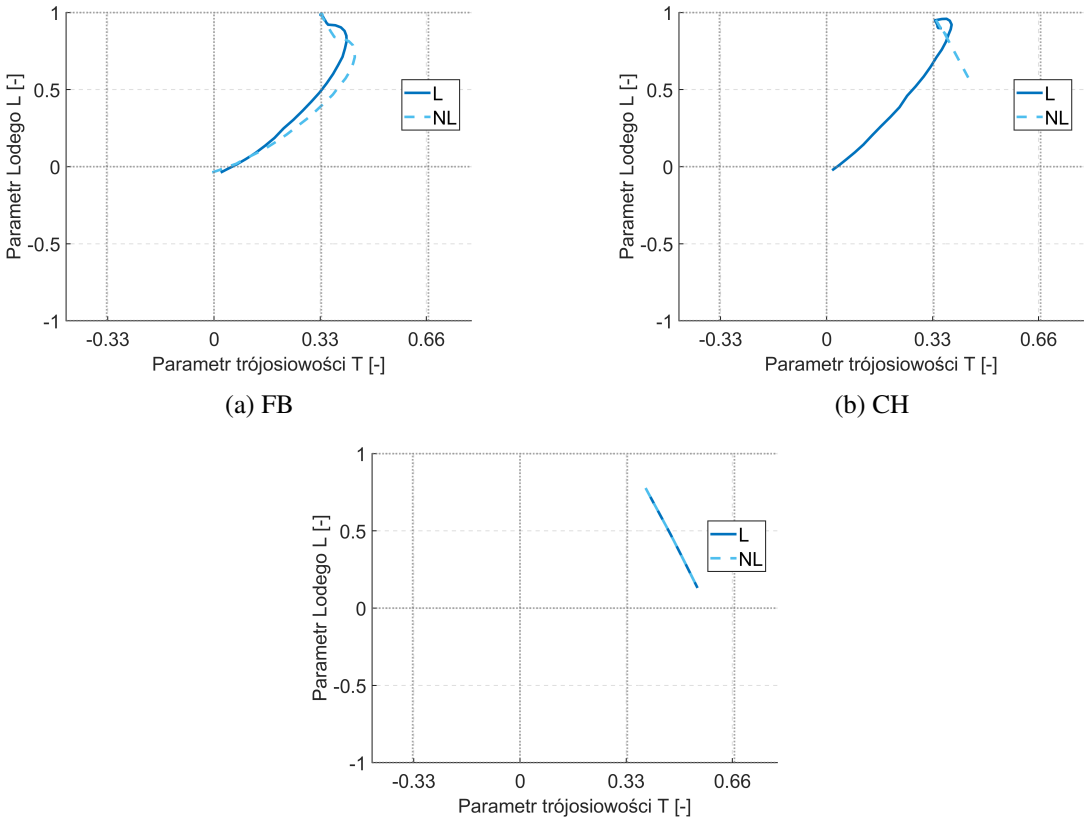
(a) FB

(b) CH

(c) NT

Rys. 4.10. Wykresy efektywnego odkształcenia plastycznego od parametru trójosiowości z porównaniem modelu lokalnego oznaczonego L i nielokalnego oznaczonego NL.

Wykresy na rysunku 4.10 przedstawiają zależność efektywnego odkształcenia plastycznego od parametru trójosiowości. W przypadku geometrii FB parametr T dla małego odkształcenia odpowiada jednoosiowemu rozciąganiu. Pod wpływem dalszego obciążenia, jego wartość dąży do zera odpowiadającego ścinaniu. Model CH podobnie jak na wykresie 4.9 przyjmuje inne wartości parametru trójosiowości dla modelu lokalnego i nielokalnego. W przypadku tego pierwszego wartość T, zaczynając od wartości $0,33$ charakteryzującej rozciąganie, dla odkształcenia powyżej $0,5$ zaczyna spadać do 0. W przypadku modelu nielokalnego trójosiowość zamiast maleć, zaczyna rosnąć. Oznacza to wystąpienie dwuosiowego rozciągania. Dla próbki NT parametr T od początku odkształcenia przyjmował wartości około $0,4$. Wraz z trwaniem symulacji w analizowanym elemencie trójosiowość zaczynała odpowiadać dwuosiowemu rozciąganiu.



(a) FB

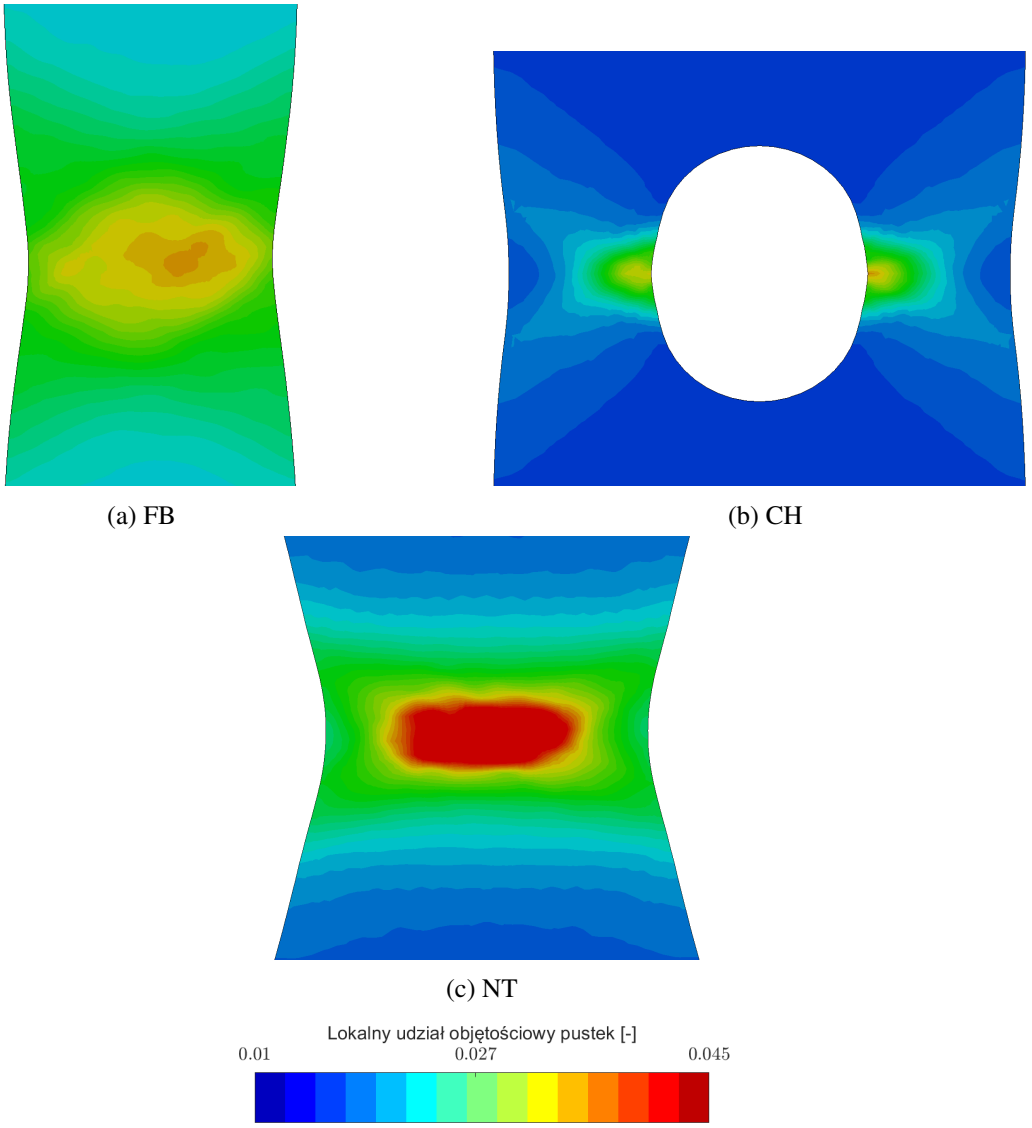
(b) CH

(c) NT

Rys. 4.11. Wykresy parametru Lodego od parametru trójosiowości z porównaniem modelu lokalnego oznaczonego L i nielokalnego oznaczonego NL.

Wykresy parametru Lodego od parametru trójosiowości 4.11 pozwalają dokładnie scharakteryzować stan naprężenia w analizowanym elemencie. Można je porównać z rysunkiem teoretycznych wartości T i L 2.6. Próbka FB w trakcie symulacji przechodzi z stanu jednoosiowego rozciągania odpowiadającego wartościom $T = 0,33$ oraz $L = 1$ do czystego ścinania dla którego T oraz L są równe 0. W sensie fizycznym oznacza to, że wraz z powstawaniem szyjki naprężenie w krytycznym punkcie jednocześnie ściskało oraz rozciągało element, powodując ścinanie. W przypadku geometrii CH model lokalny L zachowuje się podobnie jak FB. W przypadku modelu nielokalnego stan naprężenia na początku odpowiada jednoosiowemu rozciąganiu. Wraz z trwaniem symulacji parametr Lodego maleje, a trójosiowość wzrasta. Oznacza to, że w elemencie zaczęły się pojawiać naprężenia ścinające. Były one efektem zbliżenia się wartości T do $0,66$, która opisuje dwuosiowe rozciąganie. Dla wykresu NT nie da się jednoznacznie określić stanu naprężenia, ponieważ wartości parametrów trójosiowości oraz Lodego podczas trwania symulacji nie przyjmują wartości charakterystycznych. Widoczny jest spadek L oraz wzrost T. Dla początku odkształcenia stan naprężenia w elemencie jest najbardziej zbliżony do jednoosiowego rozciągania. Wraz z rozwojem odkształcenia linia wykresu zmierza do punktu

odpowiadającego rozciąganiu płaszczyznowym z występującym ścinaniem. Jest to charakterystyczne dla próbek z karbem gdzie ścinanie jest wymuszone geometrią.

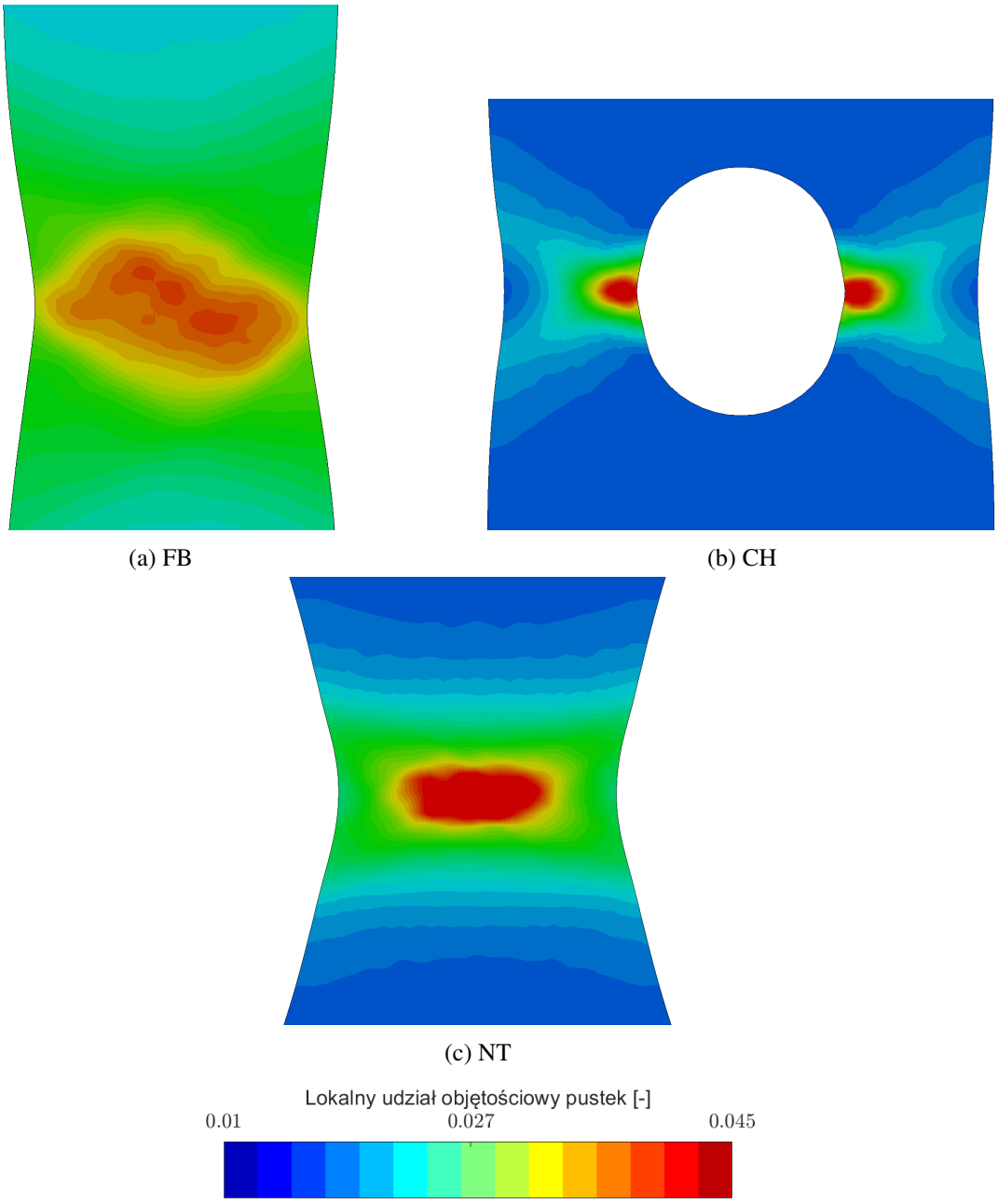


(a) FB (b) CH

(c) NT

Rys. 4.12. Udział objętościowy pustek chwilę przed pęknięciem bez zastosowania modelu nielokalnego.

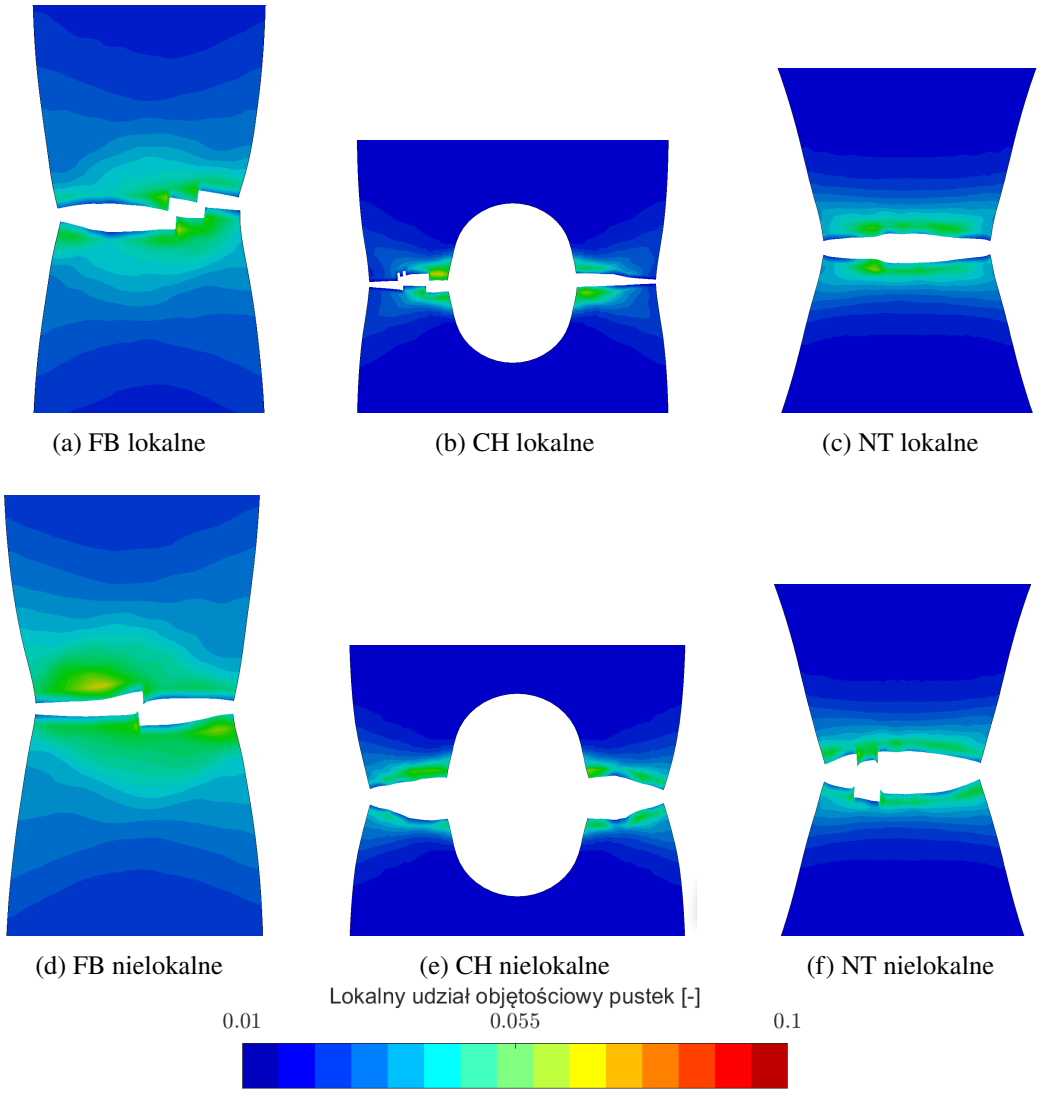
Udział objętościowy pustek na rysunku 4.12 koncentruje się w miejscu początku pęknięcia materiału. W przypadku próbek FB oraz NT jest to miejsce w środku, a w CH lokalizacja występuje od wewnątrz na krawędzi otworu. W modelu drugim i trzecim pustki lokalizują się w bardzo małej części materiału powodując przyśpieszone zniszczenie. W przypadku FB udział objętościowy pustek koncentruje się w całym paśmie powstającej szyjki.



Rys. 4.13. Udział objętościowy pustek chwilę przed pęknięciem z zastosowanym modelem nielokalnym.

Na rysunku 4.13 widoczny udział objętościowy pustek różni się od tego w modelach, w których nie zastosowano modelu nielokalnego. Główna różnica polega na tym, że koncentracja porowatości występuje na większym obszarze. Jest to szczególnie widoczne w próbkach FB i CH. Największa zmiana jest widoczna w modelu z otworem. Pustki dzięki dodatkowej kontroli rosną nie tylko na krawędzi ale i wewnątrz materiału. Jest to główny powód, dla którego wykresy na rysunkach 4.11 oraz 4.10 wykazują tak dużą różnicę dla

geometrii CH. Widoczna jest też na nich znaczna różnica maksymalnej wartości efektywnego odkształcenia plastycznego. Model GTN bez dodatkowych poprawek koncentrował wzrost pustek w małej części modelu, prowadząc do przedwczesnego zniszczenia. Model nielokalny, uśredniając wartości z sąsiednich elementów wyeliminował ten efekt. Efektem tego było zwiększenie odkształcenia oraz zmniejszenie wartości parametru Lodego (4.9). Zniszczenie w programie LS Dyna jest symulowane poprzez usuwanie elementów, których wartość parametru uszkodzenia przekroczy wartość graniczną. W przypadku modelu GTN parametr f_f określa inicjację pęknięcia. Po przekroczeniu skalibrowanej wartości $0,16$ element jest usuwany. Nagły ubytek materiału powoduje zauważalny spadek naprężeń. W rzeczywistości proces zniszczenia nie przebiega aż tak gwałtownie.



(a) FB lokalne (b) CH lokalne (c) NT lokalne

(d) FB nielokalne (e) CH nielokalne (f) NT nielokalne

Rys. 4.14. Porównanie udziału objętościowego pustek chwilę po pęknięciu.

Rysunek 4.14 bardzo dobrze obrazuje wpływ modelu nielokalnego na wzrost pustek w materiale do momentu pęknięcia. Dla każdej geometrii widać znaczące różnice w rozkładzie udziału objętościowego pustek oraz lokalizacji odkształcenia. Porównując Rysunki 4.14a oraz 4.14d, na pierwszym z nich pustki koncentrują się głównie wokół krawędzi pękniecia. W drugim przypadku porowatość wzrosła także w głębi materiału. Dla geometrii CH różnice są najbardziej widoczne. Przy zastosowaniu modelu nielokalnego pęknięcie nastąpiło później oraz pustki powstały na całej szerokości modelu, a nie tylko od strony otworu. Porównując próbki 4.14c oraz 4.14f nie jest widoczna większa różnica jeśli chodzi o porowatość.
We wszystkich przypadkach powstałe przewężenie jest większe, przy zastosowaniu modelu nielokalnego.

5. Podsumowanie

Celem niniejszego projektu inżynierskiego było porównanie metod lokalizacji odkształcenia. Zrealizowano go poprzez przeprowadzenie symulacji numerycznych dla trzech różnych geometrii. Dokonano analizy czułości oraz kalibracji parametrów modelu GTN. Miało to na celu jak najdokładniejsze odwzorowanie rzeczywistego zachowania materiału - miedzi CuETP oraz zbadanie zjawiska wrażliwości siatki. Wykresy rozciągania dla zoptymalizowanego modelu GTN okazały się znacząco różne w zależności od wielkości elementu. Zmniejszenie rozmiaru siatki pozwoliło na najdokładniejsze oddanie rzeczywistej krzywej rozciągania.
Zbadano również wpływ modelu nielokalnego na zachowanie materiału podczas lokalizacji odkształcenia. Dla próbki gładkiej oraz z karbem uśrednienie zmiennych uszkodzenia pozwoliło na dokładniejsze odwzorowanie wzrostu pustek w materiale. Zastosowanie modelu nielokalnego miało największy wpływ na model z otworem, gdzie zminimalizowało ono koncentrację uszkodzenia w punkcie krytycznym. Poskutkowało to zmianą stanu naprężenia z czystego ścinania na dwuosiowe rozciąganie.
Wykorzystanie parametru trójosiowości oraz parametru Lodego pozwoliło na dokładny opis zachowania najbardziej obciążonego elementu symulowanej próbki.
Analizując wyniki symulacji w momencie po wystąpieniu zniszczenia, porównano wpływ modelu nielokalnego na charakter powstawania pęknięcia. Miał on znaczący wpływ zarówno na udział objętościowy pustek jak i wielkość powstałego przewężenia.
W przypadku analizy zjawisk takich jak lokalizacja odkształcenia dobór parametrów jest kluczowy w celu odwzorowania rzeczywistych wyników. W przypadku modelu materiałowego GTN, przeprowadzenie analizy nielokalnej pozwala zniwelować wpływ zjawiska wrażliwości siatki
Podsumowując, praca wykazała wrażliwość modelu Gursona na rozmiar siatki. Zastosowanie modelu nielokalnego prowadzi do poprawy zachowania materiału w trakcie symulacji. Pozwala on na lepsze odwzorowanie wzrostu pustek w strefie pękania, co jest bardzo przydatne w projektowaniu konstrukcji, które ulegają odkształceniom plastycznym. Wykorzystanie go wiąże się z dodatkowym kosztem obliczeniowym ale brak konieczności dokładnej kalibracji dla każdego rozmiaru elementu to wynagradza.

Bibliografia

[1] J. Skrzypek: *Plastyczność i pełzanie*, Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1986

[2] V.D. da Silva: *Mechanics and Strength of Materials*, Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2006

[3] M. Kłos: *TSIP*, *https://marklos.v.prz.edu.pl/tsip*, dostęp: 16.01.2026

[4] Vetle Espeseth: *Micromechanical modeling of plasticity, damage and fracture in aluminium alloys*, Trondheim, 2018

[5] S. J. Marcadet i D. Mohr: „Application of ductile fracture model for the prediction of low cycle fatigue in structural steel", w: *Engineering Fracture Mechanics* 289.1, 2023, s. 109469

[6] S. J. Marcadet i D. Mohr: „Micromechanically-motivated phenomenological Hosford–Coulomb model for predicting ductile fracture initiation at low stress triaxialities", w: *International Journal of Solids and Structures* 67–68, 2015, s. 40–55

[7] R. von Mises: „Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand", w: *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* 1, 1913, s. 582–592

[8] M. T. Huber: „Właściwa praca odkształcenia jako miara wytężenia materiału", w: *Czasopismo Techniczne* 22.3, 1904, s. 38–81

[9] H. Hencky: „Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen", w: *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 4.4, 1924, s. 323–334

[10] A. L. Gurson: „Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth: Part I—Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Media", w: *Journal of Engineering Materials and Technology* 99.1, 1977, s. 2–15

[11] V. Tvergaard: „Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions", w: *International Journal of Fracture* 17.4, 1981, s. 389–407

[12] A. Needleman i V. Tvergaard: „Analysis of the Cup-Cone Fracture in a Round Tensile Bar", w: *Acta Metallurgica* 32.1, 1984, s. 157–169

[13] Paweł Kossakowski: „Numeryczne modelowanie zniszczenia stali S235JR z zastosowaniem modelu materiału Gursona-Tvergaarda-Needlemana", w: *Roads and Bridges - Drogi i Mosty* 11.4, 2012, s. 295–310

[14] A. Considère: „L'Emploi du fer et de l'acier dans les constructions", w: *Annales des Ponts et Chaussées* 9, 1885, s. 574–775

[15] I.S. Yasnikov, A. Vinogradov i Y. Estrin: „Revisiting the Considère criterion from the viewpoint of dislocation theory fundamentals", w: *Scripta Materialia* 76, 2014, s. 37–40

[16] Przemysław Nosal: *Badania właściwości wytrzymałościowych połączeń blach miedzianych wykonanych technologią FSW*, Kraków, 2016

[17] Livermore Software Technology Corporation: *LS-DYNA Keyword User's Manual Volume II*, R14.0, Livermore Software Technology Corporation (LSTC), 2023